

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA ELÉTRICA

IMPLEMENTAÇÃO DE ELEMENTOS FINITOS DE SEGUNDA
ORDEM NUM SISTEMA DE CÁLCULO DE CAMPOS ELETROMAGNÉTICOS

DISSERTAÇÃO SUBMETIDA À UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
PARA OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM ENGENHARIA ELÉTRICA

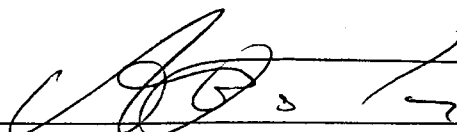
EDUARDO NOGUEIRA OLIVEIRA

FLORIANÓPOLIS, OUTUBRO DE 1990

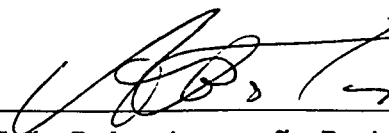
IMPLEMENTAÇÃO DE ELEMENTOS FINITOS DE SEGUNDA
ORDEM NUM SISTEMA DE CÁLCULO DE CAMPOS ELETROMAGNÉTICOS

EDUARDO NOGUEIRA OLIVEIRA

ESTA TESE FOI JULGADA ADEQUADA PARA OBTENÇÃO DO TÍTULO DE MESTRE EM
ENGENHARIA ESPECIALIDADE ENGENHARIA ELÉTRICA, CONCEPÇÃO E ANÁLISE DE
DISPOSITIVOS ELETROMECAÑICOS, E APROVADA EM SUA FORMA FINAL PELO PROGRAMA DE
PÓS-GRADUAÇÃO

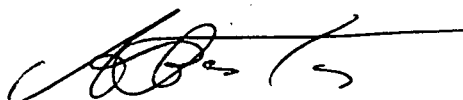


Prof. João Pedro Assumpção Bastos, Dr. D'Etat
(Orientador)

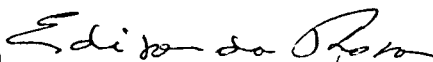


Prof. João Pedro Assumpção Bastos, Dr. D'Etat
Coordenador do Curso de Pós-Graduação em
Engenharia Elétrica

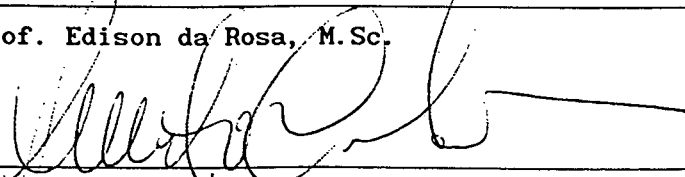
BANCA EXAMINADORA:



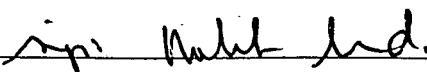
Prof. João Pedro Assumpção Bastos, Dr. D'Etat



Prof. Edison da Rosa, M.Sc.



Prof. Renato Carlson, Dr.Eng.



Prof. Sérgio Roberto Arruda, M.Sc.

Este trabalho é dedicado à

Adenise, Alice,

Geraldo, Gustavo,

Hilze, Laura e Orlando.

AGRADECIMENTOS

Ao Professor João Pedro Assumpção Bastos pela paciência, pelo bom senso e pela dedicação na orientação deste trabalho.

Ao colega e ex-Professor Renato Cardoso Mesquita pelo exemplo de dedicação ao trabalho e pelo incentivo e auxílio prestados em diversos momentos de conflito e dúvida.

Ao colega e amigo Ernane Antônio Alves Coelho cujo companheirismo foi fundamental na execução deste trabalho.

A todos os meus ex-Professores que de uma forma direta ou indireta incentivaram a realização deste trabalho.

A todos os colegas do GRUCAD e da pós-graduação.

Ao Departamento de Engenharia Elétrica e ao Departamento de Engenharia Mecânica da Universidade Federal de Santa Catarina que me proporcionaram a oportunidade de realização do curso de pós-graduação.

À CAPES que concedeu o suporte financeiro através de bolsa de estudo.

Sumário

	Pág.
1 - Introdução	10
1.1 - Considerações sobre o Sistema Computacional	12
2 - Eletrostática e Magnetostática: Problemas Tratados	14
2.1 - As Equações de Maxwell	14
2.2 - Problemas Estáticos Tratados	16
2.2.1 - O Campo Eletrostático - Meios Dielétricos	16
2.2.2 - Correntes Estacionárias - Meios Condutores	19
2.2.3 - O Campo Magnético - Potencial Escalar	20
2.2.4 - O Campo Magnético- Potencial Vetor	22
2.2.5 - Imã Permanente - Potencial Vetor	24
2.2.6 - O Potencial Vetor Elétrico	26
2.3 - Conclusão - Capítulo 2	28
3 - As Equações de Elementos Finitos	29
3.1 - O Método de Resíduos Ponderados	29
3.1.1 - O Método de Galerkin	30
3.2 - A Aplicação do Método de Galerkin	31
3.2.1 - O Campo Eletrostático - Meios Dielétricos	32
3.2.2 - Correntes Estacionárias - Meios Condutores	35
3.2.3 - O Campo Magnético - Potencial Escalar	37
3.2.4 - O Campo Magnético- Potencial Vetor	39
3.2.5 - Imã Permanente - Potencial Vetor	42
3.2.6 - O Potencial Vetor Elétrico	45
3.3 - Problemas Axi-Simétricos	48
3.3.1 - Potencial Escalar: Axi-Simetria	48
3.3.2 - Potencial Vetor: Axi-Simetria	52
3.4 - Conclusão - Capítulo 3	56
4 - O Elemento Finito Triangular Subparamétrico de Segunda Ordem	57
4.1 - O Elemento de Segunda Ordem	57
4.2 - Conclusão - Capítulo 4	68
5 - O Pós-Processamento	69
5.1 - Apresentação Gráfica dos Resultados	69

5.1.1 - Traçado via Aproximação Linear	69
5.1.2 - Traçado via Aproximação Quadrática	72
5.1.3 - Aspectos da Implementação	81
5.2 - Análise Numérica dos Resultados	81
5.2.1 - Obtenção de \vec{E} , \vec{H} , \vec{D} , \vec{B} e \vec{J}	82
5.2.2 - Obtenção do Valor do Fluxo	85
5.2.3 - Obtenção da Indutância Própria e Mútua	88
5.2.4 - O Tensor de Maxwell	89
5.3 - Conclusão - Capítulo 5	93
6 - Apresentação e Análise dos Resultados	94
6.1 - Potencial Escalar Elétrico	94
6.2 - Potencial Escalar Magnético	100
6.3 - Potencial Vetor Magnético	110
6.4 - Conclusão - Capítulo 6	117
7 - Conclusão Geral	118
8 - Referências Bibliográficas	119

Elenco de Variáveis e Operadores Matemáticos

\vec{H}	- Campo Magnético
\vec{B}	- Indução Magnética
\vec{E}	- Campo Elétrico
\vec{D}	- Indução Elétrica
\vec{J}	- Densidade de Corrente Elétrica
ρ	- Densidade de Carga Elétrica
t	- Tempo
$ \epsilon $	- Tensor de Permissividade Elétrica do Meio
$ \mu $	- Tensor de Permeabilidade Magnética do Meio
$ \delta $	- Tensor de Condutividade Elétrica do Meio
ϵ	- Permissividade Elétrica do Meio
μ	- Permeabilidade Magnética do Meio
δ	- Condutividade Elétrica do Meio
\vec{B}_r	- Indução Magnética Remanente
\vec{H}_c	- Campo Magnético Coercitivo
\vec{n}	- Vetor Unitário
<i>Rot</i>	- Operador Rotacional
<i>Div</i>	- Operador Divergente
<i>Grad</i>	- Operador Gradiente
V	- Potencial Escalar Elétrico ou Magnético
\vec{A}	- Potencial Vetor Magnético
\vec{T}	- Potencial Vetor Elétrico
∂	- Operador de Derivada Parcial
u, v	- Coordenadas Locais
x, y, z	- Coordenadas Cartesianas

$\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ - Vetores Unitários Ortogonais Cartesianos

r, θ, z - Coordenadas Cilíndricas

$\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z$ - Vetores unitários Ortogonais Cilíndricos

E_x, E_y, E_z - Componentes do Campo Elétrico na Direção x, y ou z

E_r, E_θ, E_z - Componentes do Campo Elétrico na Direção r, θ ou z

ν - Relutividade Magnética

C_i - Constantes

N_i - Função de Interpolação ou Função Teste

E - Resíduo

W_i - Função Peso

K_{ji} - Matriz de Contribuições Locais

F_j - Vetor Excitação

V_i - Vetor de Potenciais Incógnitos (Escalar)

A_i - Vetor de Potenciais Incógnitos (Vetor)

$[J]$ - Matriz Jacobiana

Resumo

Neste trabalho serão apresentados os resultados obtidos no estudo e na implementação do método de elementos finitos utilizando o elemento finito triangular subparamétrico de segunda ordem na resolução das equações diferenciais parciais que regem os fenômenos eletromagnéticos estáticos bidimensionais.

Abstract

The bidimensional static electromagnetic phenomena partial differential equations are solved using the second order subparametric triangular finite element method. The results are shown according to the study of the numerical code implemented.

CAPÍTULO 1

Introdução

O conhecimento dos fenômenos eletromagnéticos no interior de um dispositivo elétrico é fundamental na sua análise e na sua concepção.

A resolução analítica das equações diferenciais parciais de segunda ordem que regem os fenômenos eletromagnéticos nos dispositivos reais é inviável e muitas vezes impossível de ser obtida devido à complexidade geométrica das estruturas físicas encontradas.

A resolução destas equações por técnicas numéricas tornou-se com o surgimento dos computadores digitais viável e confiável. Dentre as diversas técnicas existentes destaca-se o método de elementos finitos.

O método de elementos finitos é uma técnica numérica utilizada na resolução de equações diferenciais que descrevem um determinado fenômeno físico numa determinada estrutura (Bastos [2]; Chung [5]; Dhatt [7]; Norrie [17]; Sabonnadière [21]; Silvester [22]; Zienkiewicz [26]).

O princípio básico deste método consiste na discretização do domínio de estudo em pequenas regiões de forma geométrica previamente definida chamadas elementos finitos. Estes elementos são caracterizados por pontos apropriados chamados nós. A solução da equação diferencial é aproximada, dentro de cada elemento finito, como uma combinação linear dos valores da variável incógnita em questão nos nós e de funções de interpolação devidamente escolhidas. Obtém-se a descrição do fenômeno físico analisado em todo o domínio estudado fazendo-se uma composição das aproximações obtidas em cada elemento finito.

Levando-se em consideração o princípio básico exposto acima pode-se afirmar que quanto melhor for aproximada a variável dentro de cada elemento finito, melhor será representado o fenômeno físico no domínio estudado. De uma maneira muito simplificada pode-se dizer que a aproximação da variável da equação diferencial é melhorada dentro de um elemento finito diminuindo-se o tamanho do elemento ou aumentando-se o número de nós que caracterizam o elemento finito utilizado.

Existe uma grande variedade de elementos finitos unidimensionais, bidimensionais e tridimensionais apresentados na literatura especializada (Chung [5]; Dhatt [7]; Sabonnadière [21]). Pode-se citar, por exemplo, no caso dos elementos finitos bidimensionais, o triangular de primeira ordem, muito utilizado, o de segunda ordem sub e isoparamétrico, o triangular cúbico bem como os elementos retangulares de primeira, segunda e ordens superiores.

Neste trabalho serão apresentados os resultados obtidos no estudo e na implementação do método de elementos finitos utilizando o elemento finito triangular subparamétrico de segunda ordem na resolução das equações diferenciais parciais que regem os fenômenos eletromagnéticos estáticos bidimensionais.

O elemento triangular de segunda ordem subparamétrico possui seis nós: três nós nos vértices do elemento triangular e três nos pontos médios das arestas. É um elemento de alta precisão e de relativa facilidade de implementação. No capítulo 4 será feita uma apresentação mais detalhada deste elemento.

Na próxima seção será feita uma apresentação do sistema computacional implementado de cálculo de campo elétrico e magnético, ou seja, será feita a descrição das etapas de pré-processamento, de processamento e de pós-processamento do sistema.

No capítulo 2 serão descritos os diversos problemas de cálculo de campo elétrico e magnético tratados neste trabalho. Neste capítulo serão também obtidas, a partir das equações de Maxwell, as equações diferenciais parciais que descrevem os fenômenos estáticos tratados.

A partir destas equações diferenciais serão obtidas no capítulo 3 as equações de elementos finitos para todos os problemas eletromagnéticos apresentados no capítulo 2.

No 4º capítulo, como já mencionado, será detalhado o elemento finito triangular subparamétrico de segunda ordem. Neste capítulo será desenvolvido o sistema matricial de contribuições locais K_{ji} para um dos casos tratados nos capítulos 2 e 3 como um exemplo de aplicação da formulação do elemento em questão. Serão também descritos dois métodos numéricos de integração utilizados no cálculo da matriz K_{ji} .

No capítulo 5 será feita uma descrição da etapa de pós-processamento, apresentação gráfica e análise numérica dos resultados, relativo ao sistema computacional que será apresentado na seção (1.1) abaixo.

No capítulo 6 resultados exemplificando o cálculo de campo elétrico e magnético utilizando o elemento finito de segunda ordem serão apresentados, discutidos e comparados com os obtidos utilizando o elemento finito triangular de primeira ordem.

Finalmente, conclui-se o trabalho no capítulo 7 e apresenta-se no capítulo 8 as diversas referências bibliográficas utilizadas.

1.1 - Considerações sobre o Sistema Computacional

A implementação do método de elementos finitos utilizando o elemento finito triangular subparamétrico de segunda ordem foi feita utilizando como base a estrutura do sistema computacional de cálculo de campo eletromagnético EFCAD desenvolvido no Grupo de Análise e Concepção de Dispositivos Eletromecânicos, GRUCAD, do Departamento de Engenharia Elétrica da Universidade Federal de Santa Catarina.

Este sistema utiliza o elemento finito triangular de primeira ordem. Ele foi desenvolvido para ser utilizado em microcomputadores do tipo IBM-PC-AT.

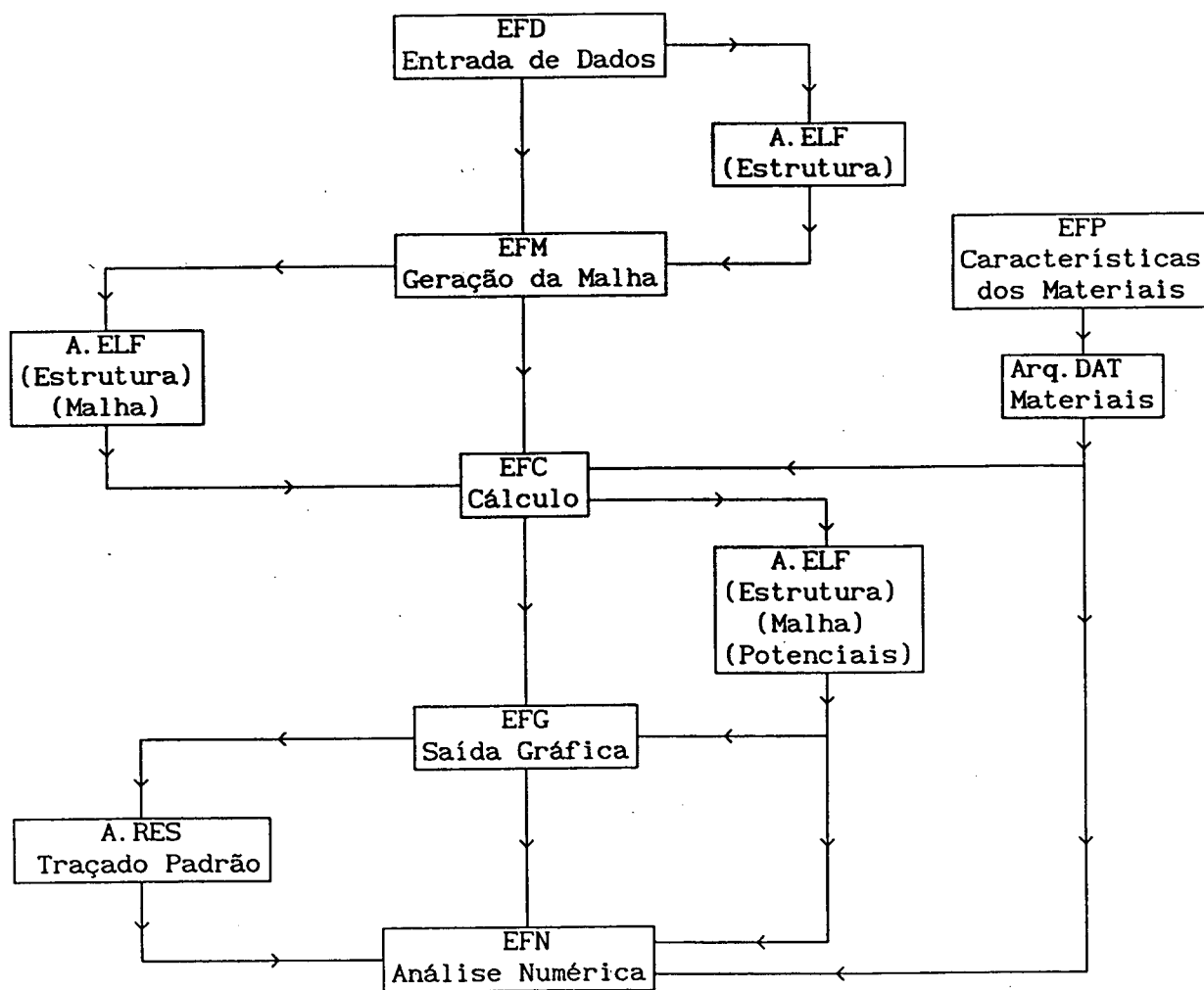


Figura 1.1 - Sistema Computacional

O sistema resultante após a implementação do elemento de segunda ordem subparamétrico possibilita a escolha de elementos de primeira ou segunda ordem.

A figura 1.1 apresenta na forma de diagrama a estrutura geral do sistema computacional resultante.

O programa EFP cria um arquivo, Arq.DAT, contendo as características elétricas dos materiais que poderão ser utilizados pelo usuário do sistema. É um programa oriundo do sistema EFCAD. Nada foi alterado na sua estrutura.

O pré-processamento é composto pelos programas EFD e EFM. No programa EFD é criada a estrutura a ser estudada e no programa EFM é efetuada a discretização do domínio automaticamente. Nada foi modificado na estrutura destes dois programas do sistema EFCAD. A malha criada pelo programa EFM é gravada no arquivo A.ELF. Ela é composta por elementos finitos triangulares de primeira ordem.

O programa de cálculo EFC possui como entrada de dados o arquivo A.ELF vindo do programa de geração automática de malha, EFM, e o arquivo Arq.DAT vindo do programa EFP como pode ser observado na figura 1.1.

É neste ponto do sistema computacional que é feita a escolha entre o elemento de primeira ou segunda ordem. Foi desenvolvida uma rotina que redefine a malha de primeira ordem criada pelo programa EFM. Existe também a possibilidade de transformar uma malha redefinida em elementos de segunda ordem em novamente uma malha com elementos de primeira ordem. Os resultados do cálculo, ou seja, o valor do potencial nos nós da malha serão gravados no arquivo A.ELF.

O pós-processamento é composto pelos programas EFG e EFN. No programa EFG é feito um tratamento gráfico dos resultados obtidos no programa de cálculo. Neste estágio é criado um outro arquivo, A.RES, que será usado no tratamento numérico dos resultados. Neste arquivo é gravado um "traçado-padrão" contendo a estrutura do dispositivo eletromagnético estudado e um certo número de linhas equipotenciais. No programa EFN é feita a análise quantitativa dos resultados. Neste estágio são extraídas as informações numéricas significativas do fenômeno físico estudado.

No capítulo 5 é feita uma discussão detalhada de aspectos do pós-processamento.

CAPÍTULO 2

Eletrostática e Magnetostática

Problemas Tratados

Neste capítulo são apresentados os diversos problemas de cálculo de campos elétricos e magnéticos tratados neste trabalho.

As equações diferenciais parciais que descrevem os fenômenos em questão serão obtidas das equações de Maxwell na forma diferencial.

2.1 - As Equações de Maxwell

As equações básicas do eletromagnetismo são as equações de Maxwell (Bastos [2]; Macedo [12]; Silvester [22]):

$$\text{Rot } \vec{E} - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \vec{0} \quad (2.1)$$

$$\text{Rot } \vec{H} - \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \vec{J} \quad (2.2)$$

$$\text{Div } \vec{B} = 0 \quad (2.3)$$

$$\text{Div } \vec{D} = \rho \quad (2.4)$$

onde

\vec{E} - Campo Elétrico

\vec{B} - Indução Magnética

\vec{H} - Campo Magnético

\vec{D} - Indução Elétrica

\vec{J} - Densidade de Corrente Elétrica

ρ - Densidade de Carga Elétrica

t - Tempo

acompanhadas das seguintes relações constitutivas (Macedo [12]):

$$\vec{D} = ||\epsilon|| \vec{E} \quad (2.5)$$

$$\vec{B} = ||\mu|| \vec{H} + \vec{B}_r \quad (2.6)$$

$$\vec{J} = ||\delta|| \vec{E} \quad (2.7)$$

onde

$||\epsilon||$ - Tensor de Permissividade Elétrica do Meio

$||\mu||$ - Tensor de Permeabilidade Magnética do Meio

$||\delta||$ - Tensor de Condutividade Elétrica do Meio

\vec{B}_r - Indução Magnética Remanente

Admite-se como hipótese que a indução magnética remanente somente será diferente de zero quando houver ímãs permanentes no domínio estudado.

Os tensores $||\epsilon||$, $||\mu||$ e $||\delta||$ são neste trabalho substituídos nas equações (2.5), (2.6) e (2.7) pelos escalares ϵ , μ e δ pois somente se utilizará materiais isotrópicos (Macedo [12]), ou seja, a resposta a um estímulo aplicado em um ponto qualquer no material não depende da direção de onde veio esse estímulo. Assim as relações constitutivas simplificam-se para:

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E} \quad (2.8)$$

$$\vec{B} = \mu \vec{H} + \vec{B}_r \quad (2.9)$$

$$\vec{J} = \delta \vec{E} \quad (2.10)$$

Na fronteira entre dois materiais que possuam características constitutivas diferentes tem-se que o comportamento do campo eletromagnético obedece as seguintes relações chamadas condições de contorno (Macedo [12]; Plonsey [18]):

$$\vec{n} \cdot \vec{B}_1 = \vec{n} \cdot \vec{B}_2 \quad (2.11)$$

$$\vec{n} \times \vec{H}_1 = \vec{n} \times \vec{H}_2 \quad (2.12)$$

$$\vec{n} \cdot \vec{J}_1 = \vec{n} \cdot \vec{J}_2 \quad (2.13)$$

$$\vec{n} \times \vec{E}_1 = \vec{n} \times \vec{E}_2 \quad (2.14)$$

onde admite-se como hipótese que não existem cargas estáticas ou correntes superficiais na fronteira entre os meios 1 e 2.

- \vec{n} - vetor normal a superfície entre os dois meios
 \cdot - indica o produto escalar
 \times - indica o produto vetorial
 1 e 2 - representam os dois meios diferentes

As equações (2.11) e (2.13) caracterizam a continuidade da componente normal da indução magnética e da densidade de corrente respectivamente. Por outro lado, as equações (2.12) e (2.14) garantem a continuidade da componente tangencial do campo magnético e do campo elétrico na fronteira entre dois meios com propriedades constitutivas diferentes.

Como já foi mencionado anteriormente somente fenômenos eletromagnéticos estáticos serão abordados neste estudo, ou seja, somente problemas onde não existe variação temporal das grandezas envolvidas. Assim, com as parcelas $\partial \vec{B}/\partial t$ e $\partial \vec{D}/\partial t$ nas equações (2.1) e (2.2) identicamente iguais a zero, as equações de Maxwell mostradas acima transformam-se em:

$$\text{Rot } \vec{E} = \vec{0} \quad (2.15)$$

$$\text{Rot } \vec{H} = \vec{J} \quad (2.16)$$

$$\text{Div } \vec{B} = 0 \quad (2.17)$$

$$\text{Div } \vec{D} = \rho \quad (2.18)$$

As partir das equações de Maxwell (2.15), (2.16), (2.17) e (2.18) e das relações constitutivas (2.8), (2.9) e (2.10) serão determinadas a seguir as equações diferenciais a derivadas parciais de 2^a ordem (equações de Laplace e Poisson) relativas aos fenômenos físicos bidimensionais abordados nesse trabalho.

2.2 - Problemas Estáticos Tratados

As equações diferenciais parciais relativas a fenômenos da eletrostática e da magnetostática serão apresentadas neste parágrafo. As equações serão explicitadas em função de potenciais escalares ou vetores.

2.2.1 - O Campo Eletrostático - Meios Dielétricos

Suponha a situação física mostrada na figura 2.1 onde existem diversos meios dielétricos de diferentes permissividades.

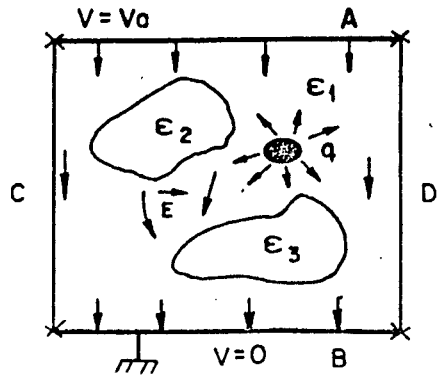


Figura 2.1

Suponha que é aplicada uma diferença de potencial entre as linhas A e B e que existe no interior do domínio uma carga elétrica q definida pela sua densidade volumétrica de carga ρ .

Como $\text{Rot } \vec{E} = \vec{0}$, eq. (2.15), pode-se definir um potencial escalar elétrico V , dado em volts, como sendo

$$\vec{E} = -\text{Grad } V \quad (2.19)$$

desde que o rotacional de um gradiente é sempre nulo (Bastos [2]; Macedo [12]);

como

$$\text{Div } \vec{D} = \rho \quad (2.20)$$

e

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E} \quad (2.21)$$

tem-se

$$\text{Div } \epsilon \vec{E} = \rho \quad (2.22)$$

ou

$$\text{Div } \epsilon (-\text{Grad } V) = \rho \quad (2.23)$$

após simples algebrismo obtém-se a equação diferencial parcial relativa ao fenômeno físico representado pelo domínio bidimensional da figura 2.1 como

sendo

$$\frac{\partial}{\partial x} \epsilon \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \epsilon \frac{\partial V}{\partial y} = -\rho \quad (2.24)$$

Se houver somente um material com permissividade ϵ a equação (2.24) pode ser simplificada para

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = -\frac{\rho}{\epsilon} \quad (2.25)$$

que é a equação de Poisson relativa a distribuição do potencial escalar elétrico V no domínio. Caso a densidade volumétrica de carga ρ seja igual a zero a equação (2.25) transforma-se na seguinte equação de Laplace

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 0 \quad (2.26)$$

As equações (2.24), (2.25) e (2.26) é que deverão ser solucionadas pelo método de elementos finitos. A obtenção do potencial V possibilita a determinação do campo elétrico \vec{E} através da relação (2.19).

Desenvolvendo a equação (2.19) obtém-se

$$\vec{E} = -\frac{\partial V}{\partial x} \vec{i} - \frac{\partial V}{\partial y} \vec{j} \quad (2.27)$$

onde os vetores \vec{i} e \vec{j} são os vetores unitários do sistema cartesiano de coordenadas nas direções x e y respectivamente. Assim, tem-se que

$$E_x = -\frac{\partial V}{\partial x} \quad (2.28)$$

$$E_y = -\frac{\partial V}{\partial y} \quad (2.29)$$

Considere o caso mostrado na figura 2.2. O segmento S_1 representa uma equipotencial de valor V_a . Um sistema de coordenadas é representado tendo o eixo x tangente a linha de potencial constante.

Como o potencial V é constante e igual a V_a na direção x tem-se que $\partial V / \partial x = 0$, ou seja, não existe campo elétrico na direção x . Por outro lado não há nenhuma limitação para que haja variação do potencial na direção y . O

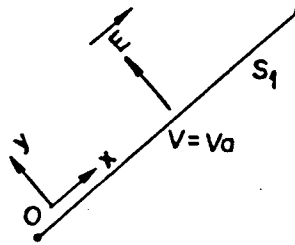


Figura 2.2

campo E_y pode ser diferente de zero o que corresponde a situação mostrada na figura 2.2.

2.2.2 - Correntes Estacionárias - Meios Condutores

Considere o problema mostrado na figura 2.3.

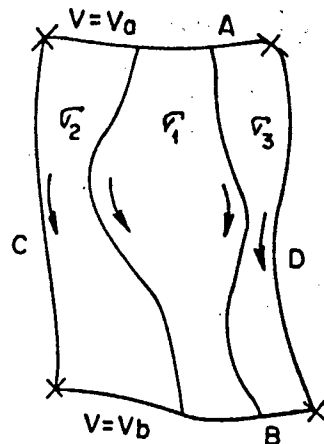


Figura 2.3

A diferença de potencial ($V_a - V_b$) fará que se estabeleçam correntes nos meios de diferentes condutividades δ_1 , δ_2 e δ_3 . A forma como essas correntes se distribuirão pelo domínio será determinada pelo processo de cálculo.

Desde que o divergente de um rotacional é sempre zero obtém-se da equação (2.16) que

$$\text{Div } \vec{J} = 0 \quad (2.30)$$

Como $\vec{E} = - \text{Grad } V$, equação (2.19), e $\vec{J} = \delta \vec{E}$, lei de Ohm sob forma

local, obtém-se da equação (2.30)

$$\text{Div } \delta (-\text{Grad } V) = 0 \quad (2.31)$$

ou seja

$$\frac{\partial}{\partial x} \delta \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \delta \frac{\partial V}{\partial y} = 0 \quad (2.32)$$

se houver somente um material condutor no domínio a equação (2.32) transforma-se em

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 0 \quad (2.33)$$

que é a equação de Laplace relativa a distribuição de potencial V no domínio.

As equações (2.32) e (2.33) é que deverão ser solucionadas pelo método de elementos finitos. A obtenção da distribuição de potencial V possibilita obter a distribuição de campo elétrico \vec{E} através da relação (2.19). A lei de Ohm, por sua vez, relaciona a distribuição de campo com a distribuição de densidade de corrente elétrica.

Da mesma forma como mostrado na seção anterior, pode-se obter que a densidade de corrente será perpendicular as linhas equipotenciais.

2.2.3 - O Campo Magnético - Potencial Escalar

Nas figuras 2.4a e 2.4b está apresentada uma situação física relativa a esse caso.

Tendo em vista que a permeabilidade do circuito magnético é muito alta, pode-se supor que a força magnetomotriz da bobina da figura 2.4a estabeleça-se entre as linhas A e B, figura 2.4b.

Como no domínio da figura 2.4b a densidade de corrente \vec{J} é nula, pode-se escrever a equação (2.16) como

$$\text{Rot } \vec{H} = \vec{0} \quad (2.34)$$

Desde que o rotacional de um gradiente é sempre nulo pode-se definir o

potencial escalar magnético como sendo igual a

$$\vec{H} = - \text{Grad } V \quad (2.35)$$

Como

$$\text{Div } \vec{B} = 0 \quad (2.36)$$

e

$$\vec{B} = \mu \vec{H} \quad (2.37)$$

obtém-se que

$$\text{Div } \mu \vec{H} = \text{Div } \mu (- \text{Grad } V) = 0 \quad (2.38)$$

ou seja

$$\frac{\partial}{\partial x} \mu \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \mu \frac{\partial V}{\partial y} = 0 \quad (2.39)$$

A permeabilidade μ , ao contrário da permissividade ϵ e da condutividade δ , em geral não é constante. Seu valor depende do valor do campo magnético \vec{H} , o que caracteriza os materiais saturáveis (Bastos [2]; Macedo [12]). Essa não-linearidade será discutida posteriormente.

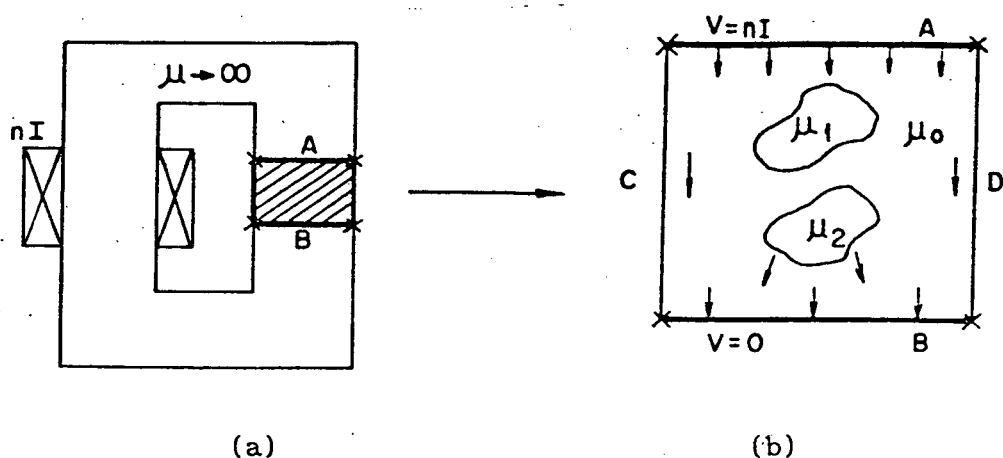


Figura 2.4

A equação (2.39) é que deverá ser resolvida pelo método de elementos finitos. A distribuição do campo magnético \vec{H} é obtida da distribuição do

potencial escalar magnético através da equação (2.35).

Pode-se afirmar que, de acordo com a equação (2.35), o campo magnético \vec{H} é sempre perpendicular às equipotenciais.

2.2.4 - O Campo Magnético - Potencial Vetor

Quando a densidade de corrente for diferente de zero não se pode utilizar a formulação em potencial escalar magnético. Para abordar esse tipo de problema, representado genericamente na figura 2.5, define-se o potencial vetor magnético.

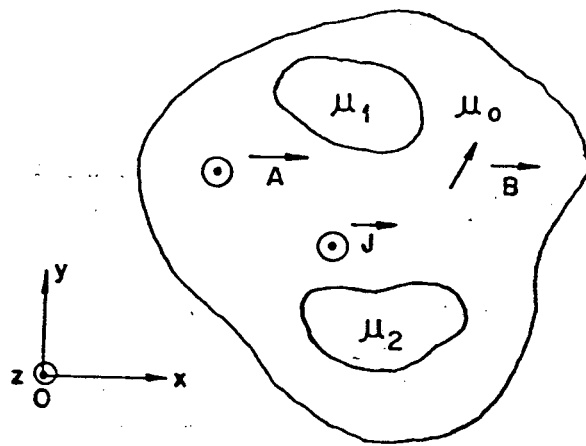


Figura 2.5

A partir da equação (2.17), $\text{Div } \vec{B} = 0$, pode-se definir o potencial vetor magnético como

$$\vec{B} = \text{Rot } \vec{A} \quad (2.40)$$

desde que, como é sabido, o divergente de um rotacional é sempre nulo.

Em problemas bidimensionais o vetor \vec{J} e o vetor \vec{A} têm apenas a componente perpendicular ao plano de estudo xy enquanto que a indução magnética tem as componentes nas direções x e y como mostrado na figura 2.5.

Assim, sendo \vec{i} , \vec{j} e \vec{k} os vetores unitários do sistema cartesiano de coordenadas tem-se

$$\vec{A} = A \vec{k} \quad (2.41)$$

$$\vec{J} = J \vec{k} \quad (2.42)$$

$$\vec{B} = B_x \vec{i} + B_y \vec{j} \quad (2.43)$$

Desenvolvendo a equação (2.40) tem-se

$$\vec{B} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & 0 & A \end{vmatrix}$$

ou

$$\vec{B} = B_x \vec{i} + B_y \vec{j} = \frac{\partial A}{\partial y} \vec{i} - \frac{\partial A}{\partial x} \vec{j} \quad (2.44)$$

como

$$\text{Rot } \vec{H} = \vec{J} \quad (2.45)$$

e

$$\vec{H} = \nu \vec{B} \quad (2.46)$$

onde $\nu = 1/\mu =$ relutividade magnética

obtem-se

$$\text{Rot } \nu \vec{B} = \vec{J} \quad (2.47)$$

ou

$$\text{Rot } \nu \text{ Rot } \vec{A} = \vec{J} \quad (2.48)$$

ou seja

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \nu \frac{\partial A}{\partial y} & -\nu \frac{\partial A}{\partial x} & 0 \end{vmatrix} = J \vec{k}$$

que após simples algebrismo obtém-se

$$\frac{\partial}{\partial x} \nu \frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \nu \frac{\partial A}{\partial y} = -J \quad (2.49)$$

que é a equação de Poisson relativa ao potencial vetor magnético. O valor da relutividade magnética depende, em geral, do valor do campo magnético (Bastos [2]; Macedo [12]). Essa não-linearidade será discutida posteriormente.

Considere a figura 2.6 onde uma linha de potencial constante e igual a A é mostrada.

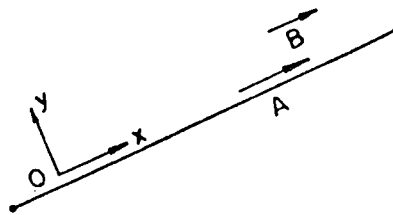


Figura 2.6

Um sistema de coordenadas cartesianas local é fixado de modo que o eixo ox fique paralelo a linha de potencial constante. Assim, como o potencial vetor magnético é constante na direção ox, tem-se que $\partial A / \partial x = 0$, ou seja, $B_y = -\partial A / \partial x = 0$. Por outro lado, o vetor \vec{A} pode variar na direção oy e $B_x = \partial A / \partial y$ pode ser diferente de zero. Portanto, uma linha equipotencial vetor é uma linha de campo, como mostrado na figura 2.6.

2.2.5 - Imã Permanente - Potencial Vetor

Suponha que no domínio de estudo exista imã permanente e que a sua curva característica possa ser representada como na figura 2.7.

De acordo com a relação constitutiva (2.9), a indução magnética pode ser escrita como sendo

$$\vec{B} = \mu \vec{H} + \vec{B}_r \quad (2.50)$$

onde μ é a permeabilidade do imã e \vec{H}_c é o campo coercitivo relacionado com a indução remanente \vec{B}_r por (Bastos [2])

$$\vec{B}_r = \mu \vec{H}_c$$

Essa hipótese aproxima-se muito da realidade para os ímãs mais utilizados (ferrite e samário cobalto) os quais possuem a permeabilidade relativa próxima de 1 (Bastos [2]).

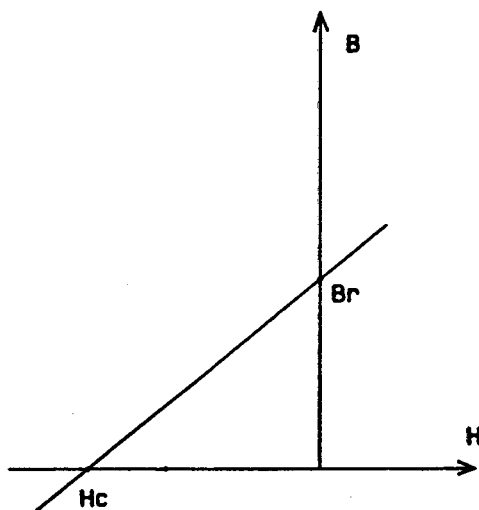


Figura 2.7

Da equação (2.50) obtém-se

$$\vec{H} = \frac{1}{\mu} (\vec{B} - \vec{B}_r) \quad (2.51)$$

Como $\text{Rot } \vec{H} = \vec{0}$ desde que na região onde se encontra o ímã a densidade de corrente é zero obtém-se

$$\text{Rot } \nu (\vec{B} - \vec{B}_r) = \vec{0} \quad (2.52)$$

Da mesma forma que na seção anterior, um potencial vetor magnético pode ser definido como

$$\vec{B} = \text{Rot } \vec{A} \quad (2.53)$$

Substituindo (2.53) em (2.52) e desenvolvendo obtém-se

$$\frac{\partial}{\partial x} \nu \left[\frac{\partial A}{\partial x} + B_{ry} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \nu \left[\frac{\partial A}{\partial y} - B_{rx} \right] = 0 \quad (2.54)$$

onde B_{rx} e B_{ry} são as componentes nas direções x e y da indução magnética remanente.

A equação diferencial (2.54) que descreve o fenômeno magnético na região do ímã será resolvida pelo método de elementos finitos.

2.2.6 - O Potencial Vetor Elétrico

Considere a situação física mostrada na figura 2.8. Como no problema apresentado na seção (2.2.2), o domínio de estudo é composto por diversos meios com condutividades diferentes. Um potencial vetor elétrico será definido a partir da equação (2.30) ao invés do potencial escalar elétrico utilizado na seção (2.2.2).

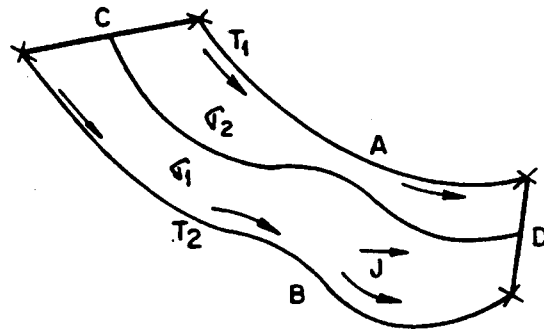


Figura 2.8

Seja a equação (2.30)

$$\text{Div } \vec{J} = 0 \quad (2.55)$$

como o divergente de um rotacional é sempre nulo, pode-se definir o potencial vetor elétrico, \vec{T} , como

$$\vec{J} = \text{Rot } \vec{T} \quad (2.56)$$

Em analogia com o potencial vetor magnético tem-se que

$$\vec{T} = T \vec{k}$$

$$\vec{J} = J_x \vec{i} + J_y \vec{j}$$

Assim, desenvolvendo a equação (2.56) obtém-se

$$\vec{J} = \frac{\partial T}{\partial y} \vec{i} - \frac{\partial T}{\partial x} \vec{j} \quad (2.57).$$

ou seja

$$J_x = \frac{\partial T}{\partial y} \quad (2.58)$$

$$J_y = - \frac{\partial T}{\partial x} \quad (2.59).$$

como

$$\vec{E} = \vec{J}/\delta \quad (2.60)$$

e

$$\text{Rot } \vec{E} = \vec{0} \quad (2.61)$$

obtém-se

$$\text{Rot } \frac{1}{\delta} \text{Rot } \vec{T} = \vec{0} \quad (2.62)$$

ou seja, após simples algebrismo

$$\frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{\delta} \frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{1}{\delta} \frac{\partial T}{\partial y} = 0 \quad (2.63)$$

que é a equação de Laplace relativa a esse problema.

Essa formulação é útil quando, ao invés de se conhecer a tensão entre as linhas C e D da figura 2.8, conhece-se a corrente I que é imposta entre as linhas A e B (Bastos [2]).

2.3 - Conclusão - Capítulo 2

Neste capítulo foram apresentados os diversos problemas do eletromagnetismo tratados neste trabalho. As diversas equações diferenciais parciais de 2ª ordem, equações de Poisson e Laplace, que descrevem os fenômenos físicos, foram desenvolvidas a partir das equações de Maxwell.

É importante se observar a semelhança entre as diversas equações diferenciais apresentadas. Essa característica tornar-se-á relevante no momento da implementação do método numérico de elementos finitos.

CAPÍTULO 3

As Equações de Elementos Finitos

Neste capítulo serão desenvolvidas as equações de elementos finitos para todos os problemas eletromagnéticos apresentados no capítulo 2.

Estas equações serão obtidas através da aplicação do método de Galerkin nas equações diferenciais parciais que regem cada um dos casos tratados.

Será feita uma introdução sucinta aos métodos de resíduos ponderados.

Serão também desenvolvidas as equações de elementos finitos dos problemas axi-simétricos em potencial escalar e vetor.

3.1 - O Método de Resíduos Ponderados

O método de resíduos ponderados é uma técnica utilizada na obtenção de solução aproximada de equações diferenciais parciais lineares e não-lineares (Chung [5]).

Assim, considere uma equação diferencial da forma

$$- \nabla \cdot \mathbf{A} \nabla u - f = 0 \quad (3.1)$$

válida em um domínio Ω e sujeita a condições de contorno.

Suponha que a função \tilde{u} dada pela relação (3.2) é uma solução aproximada da equação (3.1)

$$\tilde{u} = \sum_{i=1}^n C_i N_i \quad (3.2)$$

onde C_i são constantes desconhecidas e N_i , $i=1, \dots, n$, são funções linearmente independentes escolhidas de modo que todas as condições de contorno sejam satisfeitas.

Substituindo a equação (3.2) em (3.1) obtém-se

$$- \nabla \cdot \mathbf{A} \nabla \tilde{u} - f = \mathbb{E} \quad (3.3)$$

onde \mathbb{E} é um erro ou resíduo que surge por ser a função \tilde{u} uma solução aproximada da equação diferencial.

Um produto interno desse resíduo E com funções peso W_i , $i=1, \dots, n$, é realizado e igualado a zero

$$(E, W_i) = 0 \quad (3.4)$$

ou seja a projeção ortogonal do resíduo E no espaço vetorial gerado pelas funções linearmente independentes W_i , $i=1, \dots, n$, é forçado ser igual a zero. Explicando de outra forma, de acordo com Sabonnadière [21], o princípio fundamental do método de resíduos ponderados está baseado num teorema que estabelece que sobre um determinado espaço vetorial somente a função nula é ortogonal a todas as funções deste espaço. Quando a função resíduo é forçada ser ortogonal às funções W_i , base deste espaço vetorial, está se forçando que ela seja ortogonal a todas as funções desse espaço, ou seja, está se forçando que ela seja igual a função nula.

De acordo com Chung [5], existem 4 casos particulares do método de resíduos ponderados: o método de Galerkin, o método dos mínimos quadrados, o método dos momentos e o método da colocação. A diferença entre os 4 casos está na escolha das funções peso W_i .

Apenas os dois primeiros casos são bem adaptados ao método de elementos finitos (Chung [5]). Porém, somente será apresentado o método de Galerkin que será o usado na determinação das equações de elementos finitos.

3.1.1 - O Método de Galerkin

No método de Galerkin as funções peso W_i são feitas iguais as funções N_i , $i=1, \dots, n$, chamadas de funções teste. Assim a equação (3.4) transforma-se em

$$(E, N_j) = 0 \quad (3.5)$$

ou seja

$$\int_{\Omega} E N_j d\Omega = 0 \quad (3.6)$$

ou ainda, substituindo a equação (3.3) em (3.6)

$$- \int_{\Omega} \left[A \left(\sum_{i=1}^n C_i N_i \right) + f \right] N_j d\Omega = 0 \quad (3.7)$$

onde $j = 1, \dots, n$ e Ω representa o domínio onde a equação diferencial (3.1) é válida.

O sistema de n equações representado pela relação (3.7) é usado na determinação das n constantes C_i . Com os valores destas variáveis determinados e com as n funções teste conhecidas a solução aproximada \tilde{u} , equação (3.2), estará determinada.

Como mostrado acima, o método de Galerkin possibilita de uma forma simples que soluções aproximadas de problemas de valor de contorno sejam determinadas. Porém, a não existência de uma forma sistemática de construção das funções teste é uma falha que inviabiliza o uso do método de Galerkin na grande maioria das aplicações. A única restrição feita pelo método às funções teste é que elas sejam linearmente independentes, ou seja, sejam uma base do espaço vetorial. Como é sabido, um espaço vetorial possui infinitas bases, ou seja, existe um número infinito de conjuntos de funções teste que podem ser utilizados. Uma escolha inadequada poderá fazer com que o sistema de equações (3.7) seja mal condicionado gerando, assim, resultados errados para as variáveis C_i .

O problema na escolha dessas funções teste torna-se ainda mais crítico quando os domínios Ω são bi ou tridimensionais desde que, como já foi mencionado, as funções N_i têm que satisfazer as condições de contorno impostas nestes domínios que, na maioria das vezes, possuem geometrias complexas. Todas estas dificuldades, porém, podem ser superadas utilizando-se o método de elementos finitos.

O método de elementos finitos fornece uma maneira geral e sistemática para construção das funções teste utilizadas nas aproximações de Galerkin para problemas de valor de contorno.

Assim, se as funções teste N_j na equação (3.5) forem construídas a partir do método de elementos finitos a relação (3.7) será a equação de elementos finitos relativa a equação diferencial parcial (3.1).

3.2 - A Aplicação do Método de Galerkin

Nas seções seguintes deste capítulo o método de Galerkin é aplicado nas diversas equações diferenciais parciais, equações de Poisson e Laplace, apresentadas no capítulo 2.

3.2.1 - O Campo Eletrostático - Meios Dielétricos

Considere a equação (2.24) desenvolvida na seção (2.2.1)

$$\frac{\partial}{\partial x} \epsilon \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \epsilon \frac{\partial V}{\partial y} = -\rho \quad (3.8)$$

que descreve a distribuição de potencial escalar elétrico V num domínio Ω onde existem diversos meios com permissividade ϵ diferentes e com uma certa densidade volumétrica de carga elétrica ρ (veja figura 2.1).

No contorno do domínio Ω , Γ , podem existir as seguintes condições:

- condição de contorno de Dirichlet;

$$V = V_0 \quad , \quad \text{em } \Gamma_1 \quad (3.9)$$

- condição de contorno de Neumann;

$$\frac{\partial V}{\partial \vec{n}} = \vec{g} \quad , \quad \text{em } \Gamma_2 \quad (3.10)$$

onde \vec{n} é o vetor unitário normal à fronteira.

Normalmente tem-se que a condição de contorno de Neumann é homogênea, ou seja

$$\frac{\partial V}{\partial \vec{n}} = 0 \quad , \quad \text{em } \Gamma_2 \quad (3.11)$$

isto é, a componente normal do campo elétrico é nula em Γ_2 . Assim o campo \vec{E} é tangente à fronteira.

Seja a função \tilde{V} , equação (3.12), uma solução aproximada da equação diferencial (3.8)

$$\tilde{V} = \sum_{i=1}^n V_i N_i \quad (3.12)$$

onde V_i são constantes a serem determinadas e N_i são as funções teste já citadas nas seções anteriores.

Como foi mencionado anteriormente, a substituição de (3.12) em (3.8) gera um resíduo E

$$\frac{\partial}{\partial x} \epsilon \frac{\partial \tilde{V}}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \epsilon \frac{\partial \tilde{V}}{\partial y} + \rho = E \quad (3.13)$$

que, de acordo com o método de Galerkin, deve ser projetado ortogonalmente no espaço vetorial gerado pelas funções teste N_j e o resultado deve ser igualado a zero. Assim

$$(E, N_j) = 0 \quad (3.14)$$

ou seja

$$\iint_{\Omega} \left[\frac{\partial}{\partial x} \epsilon \frac{\partial \tilde{V}}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \epsilon \frac{\partial \tilde{V}}{\partial y} + \rho \right] N_j \, dx \, dy = 0 \quad (3.15)$$

Seja nne o número total de elementos em que o domínio Ω será particionado. A equação (3.15) pode, assim, ser reescrita como sendo igual a um somatório de integrais como a seguir

$$\sum_{i=1}^{nne} \left\{ \iint_{\Omega_{ei}} \left[\frac{\partial}{\partial x} \epsilon \frac{\partial \tilde{V}}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \epsilon \frac{\partial \tilde{V}}{\partial y} + \rho \right] N_j \, dx \, dy \right\} = 0 \quad (3.16)$$

onde Ω_{ei} representa o domínio do elemento finito de número i no somatório.

Rearranjando (3.16) lembrando que dentro de cada elemento a característica do meio não varia com relação as direções x e y obtém-se:

$$\sum_{i=1}^{nne} \left\{ \iint_{\Omega_{ei}} \left[\epsilon \frac{\partial^2 \tilde{V}}{\partial x^2} + \epsilon \frac{\partial^2 \tilde{V}}{\partial y^2} + \rho \right] N_j \, dx \, dy \right\} = 0 \quad (3.17)$$

Será utilizada, a partir deste ponto, visando simplificação, somente a equação relativa a um único elemento. Assim, a equação (3.17) é reescrita como abaixo:

$$\iint_{\Omega_e} \epsilon \frac{\partial^2 \tilde{V}}{\partial x^2} N_j \, dx \, dy + \iint_{\Omega_e} \epsilon \frac{\partial^2 \tilde{V}}{\partial y^2} N_j \, dx \, dy + \iint_{\Omega_e} \rho N_j \, dx \, dy = 0 \quad (3.18)$$

Integrando por partes as duas primeiras integrais da equação (3.18) obtém-se após simples algebrismo

$$\begin{aligned} & \int_{\Gamma_e} N_j \frac{\partial \tilde{V}}{\partial x} dy + \int_{\Gamma_e} N_j \frac{\partial \tilde{V}}{\partial y} dx - \iint_{\Omega_e} \epsilon \frac{\partial \tilde{V}}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial x} dx dy - \\ & \iint_{\Omega_e} \epsilon \frac{\partial \tilde{V}}{\partial y} \frac{\partial N_j}{\partial y} dx dy + \iint_{\Omega_e} \rho N_j dx dy = 0 \end{aligned} \quad (3.19)$$

Como somente se utilizará condições de contorno de Neumann homogêneas as duas primeiras integrais anulam-se (Chung [5]) e a equação (3.19) transforma-se em

$$\iint_{\Omega_e} \epsilon \left[\frac{\partial \tilde{V}}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{V}}{\partial y} \frac{\partial N_j}{\partial y} \right] dx dy = \iint_{\Omega_e} \rho N_j dx dy \quad (3.20)$$

ou substituindo (3.12) em (3.20)

$$\begin{aligned} & \iint_{\Omega_e} \epsilon \left[\frac{\partial \left(\sum_{i=1}^n V_i N_i \right)}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial x} + \frac{\partial \left(\sum_{i=1}^n V_i N_i \right)}{\partial y} \frac{\partial N_j}{\partial y} \right] dx dy = \\ & \iint_{\Omega_e} \rho N_j dx dy \end{aligned} \quad (3.21)$$

retirando para fora da integral os somatórios e lembrando que V_i , $i=1, \dots, n$, são constantes, a equação (3.21) transforma-se em

$$\sum_{i=1}^n \left[\iint_{\Omega_e} \epsilon \left[\frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial x} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial N_j}{\partial y} \right] dx dy \right] V_i = \iint_{\Omega_e} \rho N_j dx dy \quad (3.22)$$

ou representando na forma matricial

$$K_{ji} V_i = F_j \quad (3.23)$$

onde $i=1, \dots, n$; $j=1, \dots, n$.

A matriz (n, n) K_{ji} é chamada de matriz de contribuições locais. O valor

do termo na linha j e na coluna i é dado por

$$K_{ji} = \iint \epsilon \left[\frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial x} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial N_j}{\partial y} \right] dx dy \quad (3.24)$$

É interessante observar na equação (3.24) que a matriz K_{ji} é simétrica, isto é, o termo de uma posição (j,i) é idêntico ao termo da posição (i,j) .

A matriz $(n,1)$ V_i representa as n incógnitas

$$V_i = \begin{bmatrix} V_1 \\ \vdots \\ V_n \end{bmatrix} \quad (3.25)$$

e a matriz $(n,1)$ F_j , chamada de matriz excitação, tem o termo de uma posição j qualquer dado por

$$F_j = \iint \rho N_j dx dy \quad (3.26)$$

As equações (3.22) e (3.23) são denominadas de equação de elementos finitos relativa a equação diferencial parcial (3.8) quando, como já foi dito, as funções teste N_k são obtidas pelo método de elementos finitos.

3.2.2 - Correntes Estacionárias - Meios Condutores

Considere a equação (2.32) desenvolvida na seção (2.2.2)

$$\frac{\partial}{\partial x} \delta \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \delta \frac{\partial V}{\partial y} = 0 \quad (3.27)$$

que descreve a distribuição de potencial escalar elétrico num domínio Ω onde podem existir diversos materiais com condutividades elétricas diferentes (veja figura 2.3).

As mesmas considerações feitas na seção (3.2.1) com relação às condições de contorno de Dirichlet e Neumann são válidas nesta seção.

Assim, de acordo com o método de Galerkin, seja \tilde{V} , equação (3.28), uma solução aproximada da equação diferencial (3.27)

$$\tilde{V} = \sum_{i=1}^n V_i N_i \quad (3.28)$$

A substituição de (3.28) em (3.27) gera um resíduo E que é projetado ortogonalmente no espaço gerado pelas n funções teste e o resultado é igualado a zero, ou seja

$$(E, N_j) = 0 \quad (3.29)$$

ou seja

$$\iint_{\Omega} \left[\frac{\partial}{\partial x} \delta \frac{\partial \tilde{V}}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \delta \frac{\partial \tilde{V}}{\partial y} \right] N_j dx dy = 0 \quad (3.30)$$

Seja nne o número total de elementos em que o domínio Ω será particionado. A equação (3.30) pode, assim, ser reescrita como sendo igual a um somatório de integrais como a seguir

$$\sum_{i=1}^{nne} \left\{ \iint_{\Omega_{ei}} \left[\frac{\partial}{\partial x} \delta \frac{\partial \tilde{V}}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \delta \frac{\partial \tilde{V}}{\partial y} \right] N_j dx dy \right\} = 0 \quad (3.31)$$

onde Ω_{ei} representa o domínio do elemento finito de número i no somatório.

Rearranjando (3.31) lembrando que dentro de cada elemento a característica do meio não varia com relação as direções x e y obtém-se:

$$\sum_{i=1}^{nne} \left\{ \iint_{\Omega_{ei}} \left[\delta \frac{\partial^2 \tilde{V}}{\partial x^2} + \delta \frac{\partial^2 \tilde{V}}{\partial y^2} \right] N_j dx dy \right\} = 0 \quad (3.32)$$

Será utilizada, a partir deste ponto, visando simplificação, somente a equação relativa a um único elemento. Assim, a equação (3.32) é reescrita como abaixo:

$$\iint_{\Omega_e} \delta \frac{\partial^2 \tilde{V}}{\partial x^2} N_j dx dy + \iint_{\Omega_e} \delta \frac{\partial^2 \tilde{V}}{\partial y^2} N_j dx dy = 0 \quad (3.33)$$

Integrando por partes a equação (3.33) obtém-se

A substituição de (3.28) em (3.27) gera um resíduo E que é projetado ortogonalmente no espaço gerado pelas n funções teste e o resultado é igualado a zero, ou seja

$$(E, N_j) = 0 \quad (3.29)$$

ou seja

$$\iint_{\Omega} \left[\frac{\partial}{\partial x} \delta \frac{\partial \tilde{V}}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \delta \frac{\partial \tilde{V}}{\partial y} \right] N_j dx dy = 0 \quad (3.30)$$

Seja nne o número total de elementos em que o domínio Ω será particionado. A equação (3.30) pode, assim, ser reescrita como sendo igual a um somatório de integrais como a seguir

$$\sum_{i=1}^{nne} \left\{ \iint_{\Omega_{ei}} \left[\frac{\partial}{\partial x} \delta \frac{\partial \tilde{V}}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \delta \frac{\partial \tilde{V}}{\partial y} \right] N_j dx dy \right\} = 0 \quad (3.31)$$

onde Ω_{ei} representa o domínio do elemento finito de número i no somatório.

Rearranjando (3.31) lembrando que dentro de cada elemento a característica do meio não varia com relação as direções x e y obtém-se:

$$\sum_{i=1}^{nne} \left\{ \iint_{\Omega_{ei}} \left[\delta \frac{\partial^2 \tilde{V}}{\partial x^2} + \delta \frac{\partial^2 \tilde{V}}{\partial y^2} \right] N_j dx dy \right\} = 0 \quad (3.32)$$

Será utilizada, a partir deste ponto, visando simplificação, somente a equação relativa a um único elemento. Assim, a equação (3.32) é reescrita como abaixo:

$$\iint_{\Omega_e} \delta \frac{\partial^2 \tilde{V}}{\partial x^2} N_j dx dy + \iint_{\Omega_e} \delta \frac{\partial^2 \tilde{V}}{\partial y^2} N_j dx dy = 0 \quad (3.33)$$

Integrando por partes a equação (3.33) obtém-se

$$\begin{aligned}
& \int_{\Gamma_e} N_j \frac{\partial \tilde{V}}{\partial x} dy + \int_{\Gamma_e} N_j \frac{\partial \tilde{V}}{\partial y} dx - \iint_{\Omega_e} \delta \frac{\partial \tilde{V}}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial x} dx dy - \\
& \iint_{\Omega_e} \delta \frac{\partial \tilde{V}}{\partial y} \frac{\partial N_j}{\partial y} dx dy = 0
\end{aligned} \tag{3.34}$$

Como somente se utilizará condições de contorno de Neumann homogêneas, as duas primeiras integrais da equação (3.34) anulam-se (Chung [5]). Assim, obtém-se que

$$\iint_{\Omega_e} \delta \left[\frac{\partial \tilde{V}}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{V}}{\partial y} \frac{\partial N_j}{\partial y} \right] dx dy = 0 \tag{3.35}$$

Substituindo (3.30) em (3.35) e rearranjando os termos obtém-se após simples algebrismo

$$\sum_{i=1}^n \left[\iint_{\Omega_e} \delta \left[\frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial x} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial N_j}{\partial y} \right] V_i dx dy \right] = 0 \tag{3.36}$$

ou na forma matricial

$$K_{ji} V_i = 0 \tag{3.37}$$

onde $j=1, \dots, n$; $i=1, \dots, n$.

A matriz (n,n) K_{ji} , como dito na seção anterior, é chamada de matriz de contribuições locais. É uma matriz simétrica como pode ser observado na equação (3.38).

$$K_{ji} = \iint_{\Omega_e} \delta \left[\frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial x} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial N_j}{\partial y} \right] dx dy \tag{3.38}$$

A matriz $(n,1)$ V_i , como já mencionado, representa as n incógnitas a serem calculadas.

As equações (3.36) e (3.37) são denominadas de equação de elementos finitos relativa a equação diferencial parcial (3.27).

3.2.3 - O Campo Magnético - Potencial Escalar

Seja a equação diferencial (2.39) desenvolvida na seção (2.2.3)

$$\frac{\partial}{\partial x} \mu \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \mu \frac{\partial V}{\partial y} = 0 \quad (3.39)$$

que descreve a distribuição de potencial escalar magnético num domínio Ω (veja figura 2.4).

Na fronteira Γ do domínio Ω podem existir as seguintes condições:

- condição de contorno de Dirichlet;

$$V = V_0, \quad \text{em } \Gamma_1 \quad (3.40)$$

- condição de contorno de Neumann;

$$\frac{\partial V}{\partial \vec{n}} = \vec{g}, \quad \text{em } \Gamma_2 \quad (3.41)$$

Utilizar-se-á condição de Neumann homogênea, isto é

$$\frac{\partial V}{\partial \vec{n}} = - \vec{H}_n = \vec{0}, \quad \text{em } \Gamma_2 \quad (3.42)$$

ou seja, a componente normal do campo magnético é nula em Γ_2 . Assim o campo \vec{H} é tangente à fronteira.

Aplicando o método de Galerkin na equação diferencial (3.39) da mesma forma como foi feito nas duas seções anteriores obtém-se as seguintes equações

$$\sum_{i=1}^n \left[\iint_{\Omega_e} \mu \left[\frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial x} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial N_j}{\partial y} \right] V_i dx dy \right] = 0 \quad (3.43)$$

ou na forma matricial

$$K_{ji} V_i = 0 \quad (3.44)$$

onde

$$K_{ji} = \iint \mu \left[\frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial x} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial N_j}{\partial y} \right] dx dy \quad (3.45)$$

e

$$V_1 = \begin{bmatrix} V_1 \\ \vdots \\ V_n \end{bmatrix} \quad (3.46)$$

As equações (3.43) e (3.44) são denominadas de equação de elementos finitos relativa a equação diferencial (3.39) desde que as funções teste N_k sejam obtidas pelo método de elementos finitos.

3.2.4 - O Campo Magnético - Potencial Vetor

Nessa seção aplicar-se-á o método de Galerkin na equação diferencial (2.49) desenvolvida na seção (2.2.4) reescrita abaixo

$$\frac{\partial}{\partial x} \nu \frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \nu \frac{\partial A}{\partial y} = -J \quad (3.47)$$

que descreve a distribuição de potencial vetor magnético num domínio Ω representado genericamente na figura 2.5.

Na fronteira Γ do domínio Ω podem existir as seguintes condições:

- condição de contorno de Dirichlet;

$$A = A_0 \quad , \quad \text{em } \Gamma_1 \quad (3.48)$$

- condição de contorno de Neumann;

$$\frac{\partial A}{\partial \vec{n}} = \vec{g} \quad , \quad \text{em } \Gamma_2 \quad (3.49)$$

Utilizar-se-á somente condição de Neumann Homogênea, ou seja

$$\frac{\partial A}{\partial \vec{n}} = 0 \quad , \quad \text{em } \Gamma_2 \quad (3.50)$$

Seguindo os mesmos passos das seções anteriores seja \tilde{A} a solução aproximada da equação diferencial (3.47)

$$\tilde{A} = \sum_{i=1}^n A_i N_i \quad (3.51)$$

onde A_i , $i=1, \dots, n$, são constantes desconhecidas e N_i , $i=1, \dots, n$, são as funções teste.

A substituição de (3.51) em (3.47) gera, como já exposto, um resíduo E

$$\frac{\partial}{\partial x} \nu \frac{\partial \tilde{A}}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \nu \frac{\partial \tilde{A}}{\partial y} + J = E \quad (3.52)$$

que deve ser projetado ortogonalmente no espaço vetorial gerado pelas funções teste e o resultado deve ser igualado a zero, ou seja

$$(E, N_j) = 0 \quad (3.53)$$

ou

$$\int_{\Omega} E N_j d\Omega = 0 \quad (3.54)$$

ou ainda substituindo (3.52) em (3.54) chega-se a

$$\iint_{\Omega} \left[\frac{\partial}{\partial x} \nu \frac{\partial \tilde{A}}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \nu \frac{\partial \tilde{A}}{\partial y} + J \right] N_j dx dy = 0 \quad (3.55)$$

Seja nne o número total de elementos em que o domínio Ω será particionado. A equação (3.55) pode, assim, ser reescrita como sendo igual a um somatório de integrais como a seguir

$$\sum_{i=1}^{nne} \left\{ \iint_{\Omega_{ei}} \left[\frac{\partial}{\partial x} \nu \frac{\partial \tilde{A}}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \nu \frac{\partial \tilde{A}}{\partial y} + J \right] N_j dx dy \right\} = 0 \quad (3.56)$$

onde Ω_{ei} representa o domínio do elemento finito de número i no somatório.

Rearranjando (3.56) lembrando que dentro de cada elemento a característica do meio não varia com relação as direções x e y obtém-se:

$$\sum_{i=1}^{nne} \left\{ \iint_{\Omega_{ei}} \left[\nu \frac{\partial^2 \tilde{A}}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 \tilde{A}}{\partial y^2} + J \right] N_j dx dy \right\} = 0 \quad (3.57)$$

Será utilizada, a partir deste ponto, visando simplificação, somente a equação relativa a um único elemento. Assim, a equação (3.57) é reescrita como abaixo:

$$\iint_{\Omega_e} \nu \frac{\partial^2 \tilde{A}}{\partial x^2} N_j \, dx \, dy + \iint_{\Omega_e} \nu \frac{\partial^2 \tilde{A}}{\partial y^2} N_j \, dx \, dy = - \iint_{\Omega_e} J N_j \, dx \, dy \quad (3.58)$$

Fazendo integração por partes nas integrais da metade esquerda de (3.58) chega-se a

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_e} N_j \frac{\partial \tilde{A}}{\partial x} \, dy + \int_{\Gamma_e} N_j \frac{\partial \tilde{A}}{\partial y} \, dx - \iint_{\Omega_e} \nu \frac{\partial \tilde{A}}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial x} \, dx \, dy - \\ \iint_{\Omega_e} \nu \frac{\partial \tilde{A}}{\partial y} \frac{\partial N_j}{\partial y} \, dx \, dy = - \iint_{\Omega_e} J N_j \, dx \, dy = 0 \end{aligned} \quad (3.59)$$

Como será utilizado somente condições de contorno de Neumann homogêneas as duas integrais realizadas na fronteira Γ_e anulam-se (Chung [5]). Assim

$$\iint_{\Omega_e} \nu \left[\frac{\partial \tilde{A}}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{A}}{\partial y} \frac{\partial N_j}{\partial y} \right] \, dx \, dy = \iint_{\Omega_e} J N_j \, dx \, dy \quad (3.60)$$

que após substituição de (3.51) chega-se a

$$\sum_{i=1}^n \left[\iint_{\Omega_e} \nu \left[\frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial x} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial N_j}{\partial y} \right] A_i \, dx \, dy \right] = \iint_{\Omega_e} J N_j \, dx \, dy \quad (3.61)$$

que pode ser escrita na forma matricial como

$$K_{ji} A_i = F_j \quad (3.62)$$

onde $j=1, \dots, n$; $i=1, \dots, n$.

A matriz (n,n) de contribuições locais K_{ji} tem o termo da linha j , coluna i dado por

$$K_{ji} = \iint \nu \left[\frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial x} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial N_j}{\partial y} \right] \, dx \, dy \quad (3.63)$$

É importante observar que a matriz K_{ji} é simétrica pois, como pode ser facilmente comparado, os termos genéricos K_{ji} e K_{ij} são idênticos para quaisquer valores de j e i .

A matriz de n posições A_i representa as n incógnitas

$$A_i = \begin{bmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_n \end{bmatrix} \quad (3.64)$$

e a matriz $(n,1)$ de excitação F_j tem o termo de uma linha j qualquer dado por

$$F_j = \iint J N_j \, dx \, dy \quad (3.65)$$

As equações (3.61) e (3.62) são denominadas de equação de elementos finitos relativa a equação diferencial (3.47) desde que as funções teste N_k sejam obtidas pelo método de elementos finitos.

3.2.5 - Imã Permanente - Potencial Vetor

Considere a situação física descrita sucintamente na seção (2.2.5). O método de Galerkin será aplicado agora à equação diferencial (2.54), reescrita abaixo, que descreve a distribuição do potencial vetor magnético num domínio Ω onde existe imã permanente e não existe corrente (veja figura 2.7).

$$\frac{\partial}{\partial x} \nu \left[\frac{\partial A}{\partial x} + B_{ry} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \nu \left[\frac{\partial A}{\partial y} - B_{rx} \right] = 0 \quad (3.66)$$

As mesmas considerações feitas com relação as condições de contorno de Dirichlet e Neumann na seção anterior são válidas nesta seção.

Seja \tilde{A} , equação (3.67), uma solução aproximada da equação diferencial (3.66)

$$\tilde{A} = \sum_{i=1}^n A_i N_i \quad (3.67)$$

onde A_i são constantes desconhecidas e N_i , $i=1, \dots, n$, são as funções teste.

As substituição de (3.67) em (3.66) ocasiona um resíduo E

$$\frac{\partial}{\partial x} \nu \left[\frac{\partial \tilde{A}}{\partial x} + B_{ry} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \nu \left[\frac{\partial \tilde{A}}{\partial y} - B_{rx} \right] = E \quad (3.68)$$

desde que (3.67) é uma solução aproximada.

Dé acordo com o método de Galerkin deve-se fazer o produto interno deste resíduo E com as n funções teste N_j e o resultado deve ser igualado a zero. Assim

$$(E, N_j) = 0 \quad (3.69)$$

ou

$$\int_{\Omega} E N_j d\Omega = 0 \quad (3.70)$$

ou ainda substituindo (3.68) em (3.70)

$$\iint_{\Omega} \left[\frac{\partial}{\partial x} v \left(\frac{\partial \tilde{A}}{\partial x} + B_{ry} \right) + \frac{\partial}{\partial y} v \left(\frac{\partial \tilde{A}}{\partial y} - B_{rx} \right) \right] N_j dx dy = 0 \quad (3.71)$$

Seja nne o número total de elementos em que o domínio Ω será particionado. A equação (3.71) pode, assim, ser reescrita como sendo igual a um somatório de integrais como a seguir

$$\sum_{i=1}^{nne} \left\{ \iint_{\Omega_{ei}} \left[\frac{\partial}{\partial x} v \left(\frac{\partial \tilde{A}}{\partial x} + B_{ry} \right) + \frac{\partial}{\partial y} v \left(\frac{\partial \tilde{A}}{\partial y} - B_{rx} \right) \right] N_j dx dy \right\} = 0 \quad (3.72)$$

onde Ω_{ei} representa o domínio do elemento finito de número i no somatório.

Rearranjando (3.72) lembrando que dentro de cada elemento a característica do meio não varia com relação as direções x e y obtém-se:

$$\sum_{i=1}^{nne} \left\{ \iint_{\Omega_{ei}} v \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial \tilde{A}}{\partial x} + B_{ry} \right] N_j dx dy + \iint_{\Omega_{ei}} v \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{\partial \tilde{A}}{\partial y} - B_{rx} \right] N_j dx dy \right\} = 0 \quad (3.73)$$

Será utilizada, a partir deste ponto, visando simplificação, somente a equação relativa a um único elemento. Assim, a equação (3.73) é reescrita como abaixo:

$$\int \int_{\Omega_e} \nu \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial \tilde{A}}{\partial x} + B_{ry} \right] N_j dx dy + \int \int_{\Omega_e} \nu \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{\partial \tilde{A}}{\partial y} - B_{rx} \right] N_j dx dy = 0 \quad (3.74)$$

Integrando por partes as duas integrais acima obtém-se

$$\begin{aligned} & \int_{\Gamma_e} \nu N_j \left[\frac{\partial \tilde{A}}{\partial x} + B_{ry} \right] dy + \int_{\Gamma_e} \nu N_j \left[\frac{\partial \tilde{A}}{\partial y} - B_{rx} \right] dx - \\ & \int \int_{\Omega_e} \nu \left[\frac{\partial \tilde{A}}{\partial x} + B_{ry} \right] \frac{\partial N_j}{\partial x} dx dy - \int \int_{\Omega_e} \nu \left[\frac{\partial \tilde{A}}{\partial y} - B_{rx} \right] \frac{\partial N_j}{\partial y} dx dy = 0 \end{aligned} \quad (3.75)$$

As integrais realizadas na fronteira Γ anulam-se e a equação (3.75) torna-se após algumas modificações

$$\int \int_{\Omega_e} \nu \left[\frac{\partial \tilde{A}}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{A}}{\partial y} \frac{\partial N_j}{\partial y} \right] dx dy = \int \int_{\Omega_e} \nu \left[B_{rx} \frac{\partial N_j}{\partial y} - B_{ry} \frac{\partial N_j}{\partial x} \right] dx dy \quad (3.76)$$

Substituindo (3.67) em (3.76) obtém-se

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^n \left[\int \int_{\Omega_e} \nu \left[\frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial x} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial N_j}{\partial y} \right] A_i dx dy \right] = \\ & \int \int_{\Omega_e} \nu \left[B_{rx} \frac{\partial N_j}{\partial y} - B_{ry} \frac{\partial N_j}{\partial x} \right] dx dy \end{aligned} \quad (3.77)$$

ou na forma matricial

$$K_{ji} A_i = F_j \quad (3.78)$$

onde $j = 1, \dots, n$; $i = 1, \dots, n$.

A matriz (n, n) de contribuições locais K_{ji} tem o termo na linha j , coluna i dado por

$$K_{ji} = \int \int_{\Omega_e} \nu \left[\frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial x} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial N_j}{\partial y} \right] dx dy \quad (3.79)$$

A matriz K_{ji} é simétrica como pode ser facilmente observado.

A matriz de n posições A_i representa as n incógnitas

$$A_1 = \begin{bmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_n \end{bmatrix} \quad (3.80)$$

e a matriz de excitação F_j tem o termo de uma posição j qualquer dado por

$$F_j = \iint \nu \left[B_{rx} \frac{\partial N_j}{\partial y} - B_{ry} \frac{\partial N_j}{\partial x} \right] dx dy \quad (3.81)$$

As equações (3.77) e (3.78) são denominadas de equação de elementos finitos relativa a equação diferencial parcial (3.66) desde que as funções teste sejam obtidas pelo método de elementos finitos.

3.2.6 - O Potencial Vetor Elétrico

Nesta seção será obtida a equação de elementos finitos relativa à equação diferencial (2.63) desenvolvida na seção (2.2.6) cuja equação diferencial relativa a situação física mostrada na figura 2.8 é

$$\frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{\delta} \frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{1}{\delta} \frac{\partial T}{\partial y} = 0 \quad (3.82)$$

onde T é o potencial vetor elétrico.

As seguintes condições podem existir na fronteira Γ do domínio Ω :

- condição de contorno de Dirichlet;

$$T = T_0, \quad \text{em } \Gamma_1 \quad (3.83)$$

- condição de contorno de Neumann;

$$\frac{\partial T}{\partial \vec{n}} = \vec{g}, \quad \text{em } \Gamma_2 \quad (3.84)$$

Utilizar-se-á somente condição de Neumann homogênea, ou seja

$$\frac{\partial T}{\partial \vec{n}} = 0, \quad \text{em } \Gamma_2 \quad (3.85)$$

Considere \tilde{T} , equação (3.86), uma solução aproximada da equação

diferencial (3.82)

$$\tilde{T} = \sum_{i=1}^n T_i N_i \quad (3.86)$$

onde T_i são constantes desconhecidas e N_i são as funções teste.

A substituição de (3.86) em (3.82) ocasiona um resíduo E

$$\frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{\delta} \frac{\partial \tilde{T}}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{1}{\delta} \frac{\partial \tilde{T}}{\partial y} = E \quad (3.87)$$

que deve ser, de acordo com o método de Galerkin, projetado no espaço gerado pelas n funções teste e o resultado deve ser igualado a zero. Assim

$$(E, N_j) = 0 \quad (3.88)$$

ou

$$\int_{\Omega} E N_j d\Omega = 0 \quad (3.89)$$

ou ainda substituindo (3.87) em (3.89)

$$\iint_{\Omega} \left[\frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{\delta} \frac{\partial \tilde{T}}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{1}{\delta} \frac{\partial \tilde{T}}{\partial y} \right] N_j dx dy = 0 \quad (3.90)$$

Seja nne o número total de elementos em que o domínio Ω será particionado. A equação (3.90) pode, assim, ser reescrita como sendo igual a um somatório de integrais como a seguir

$$\sum_{i=1}^{nne} \left\{ \iint_{\Omega_{ei}} \left[\frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{\delta} \frac{\partial \tilde{T}}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{1}{\delta} \frac{\partial \tilde{T}}{\partial y} \right] N_j dx dy \right\} = 0 \quad (3.91)$$

onde Ω_{ei} representa o domínio do elemento finito de número i no somatório.

Rearranjando (3.91) lembrando que dentro de cada elemento a característica do meio não varia com relação as direções x e y obtém-se:

$$\sum_{i=1}^{nne} \left\{ \iint_{\Omega_{ei}} \left[\frac{1}{\delta} \frac{\partial^2 \tilde{T}}{\partial x^2} + \frac{1}{\delta} \frac{\partial^2 \tilde{T}}{\partial y^2} \right] N_j dx dy \right\} = 0 \quad (3.92)$$

Será utilizada, a partir deste ponto, visando simplificação, somente a equação relativa a um único elemento. Assim, a equação (3.92) é reescrita como abaixo:

$$\iint_{\Omega_e} \frac{1}{\delta} \frac{\partial^2 \tilde{T}}{\partial x^2} N_j dx dy + \iint_{\Omega_e} \frac{1}{\delta} \frac{\partial^2 \tilde{T}}{\partial y^2} N_j dx dy = 0 \quad (3.93)$$

Integrando por partes as integrais da equação acima e lembrando que as condições de Neumann são homogêneas obtém-se

$$\iint_{\Omega_e} \frac{1}{\delta} \left[\frac{\partial \tilde{T}}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{T}}{\partial y} \frac{\partial N_j}{\partial y} \right] dx dy = 0 \quad (3.94)$$

Substituindo (3.86) em (3.94) chega-se a

$$\sum_{i=1}^n \left[\iint_{\Omega_e} \frac{1}{\delta} \left[\frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial x} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial N_j}{\partial y} \right] T_i dx dy \right] = 0 \quad (3.95)$$

ou ainda na forma matricial

$$K_{ji} T_i = 0 \quad (3.96)$$

onde

$$K_{ji} = \iint \frac{1}{\delta} \left[\frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial x} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial N_j}{\partial y} \right] dx dy \quad (3.97)$$

e

$$T_i = \begin{bmatrix} T_1 \\ \vdots \\ T_n \end{bmatrix} \quad (3.98)$$

Neste caso também pode-se notar com facilidade que a matriz de contribuições locais K_{ji} é simétrica.

3.3 - Problemas Axi-Simétricos

Um problema é dito ser axi-simétrico quando a estrutura estudada possuir uma simetria de revolução, ou seja, uma simetria axial (Bastos [2]; Chung, [5]; Silvester [22]). Na figura 3.1a abaixo é mostrado um solenóide que exemplificará a simetria axial.

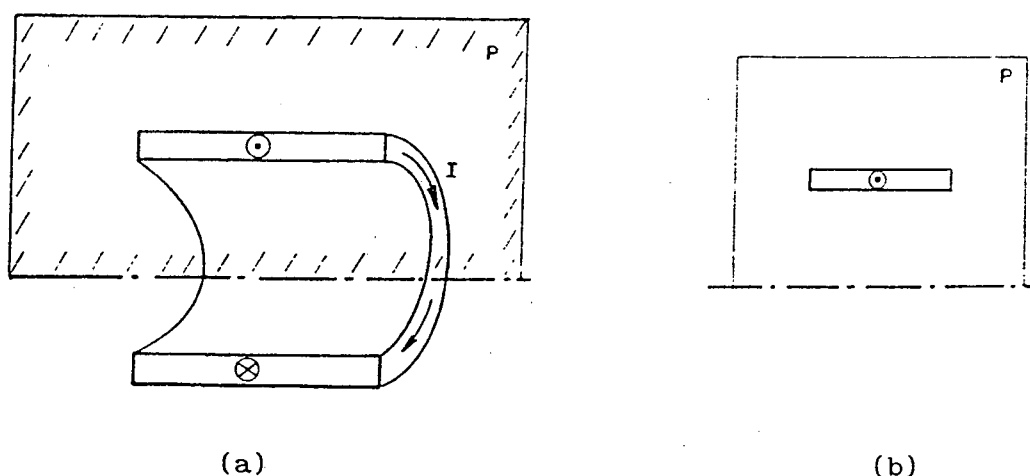


Figura 3.1

Esses problemas são tridimensionais. Porém, eles podem ser abordados bidimensionalmente utilizando-se as formulações para simetria longitudinal desenvolvidas na seção (3.2) desde que algumas modificações sejam realizadas. Assim o solenóide acima será modelado como mostrado na figura 3.1b utilizando-se coordenadas cilíndricas. O eixo x será considerado neste trabalho o eixo de revolução ou de simetria (Bastos [2]).

A formulação axi-simétrica para um caso de potencial escalar e um caso de potencial vetor será apresentada a seguir. Todas as formulações dos outros problemas tratados no capítulo 2 são obtidas de uma forma semelhante.

3.3.1 - Potencial Escalar: Axi-Simetria

Considerando o problema eletrostático apresentado na seção (2.2.1): determinação da distribuição de potencial escalar elétrico numa região com diversos meios de diferentes permissividades ϵ , uma densidade volumétrica de carga ρ e uma diferença de potencial escalar elétrico aplicada (veja figura 2.1).

Como apresentado na seção (2.2.1) tem-se que

$$\text{Rot } \vec{E} = \vec{0} \quad (3.99)$$

Assim pode-se definir um potencial escalar elétrico V tal que

$$\vec{E} = - \text{Grad } V \quad (3.100)$$

desde que o rotacional de um gradiente é sempre nulo.

Como

$$\text{Div } \vec{D} = \rho \quad (3.101)$$

e

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E} \quad (3.102)$$

obtém-se que

$$\text{Div } \epsilon (- \text{Grad } V) - \rho = 0 \quad (3.103)$$

O método de Galerkin deve ser aplicado na equação diferencial parcial (3.103). Assim seja \tilde{V} uma solução aproximada de (3.103)

$$\tilde{V} = \sum_{i=1}^n V_i N_i, \quad i = 1, \dots, n \quad (3.104)$$

onde V_i são constantes desconhecidas e N_i são as funções teste.

A substituição de (3.104) em (3.103) gera um resíduo E

$$\text{Div } \epsilon (- \text{Grad } \tilde{V}) = E \quad (3.105)$$

que deve ser projetado ortogonalmente no espaço gerado pelas n funções teste e o resultado deve ser igualado a zero. Assim

$$(E, N_j) = 0 \quad (3.106)$$

ou

$$\int_{\Omega} E N_j d\Omega = 0 \quad (3.107)$$

ou ainda substituindo (3.105) em (3.107)

$$\int_{\Omega} \text{Div } \varepsilon (-\text{Grad } \tilde{V}) N_j d\Omega - \int_{\Omega} \rho N_j d\Omega = 0 \quad (3.108)$$

Aplicando o teorema da divergência (Chung [5]) na primeira integral da equação (3.108) obtém-se que

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \text{Div } \varepsilon (-\text{Grad } \tilde{V}) N_j d\Omega - \int_{\Omega} \rho N_j d\Omega &= \int_{\Gamma} \varepsilon N_j \frac{\partial \tilde{V}}{\partial \vec{n}} d\Gamma - \\ \int_{\Omega} \varepsilon (-\text{Grad } \tilde{V}) \text{Grad } N_j d\Omega - \int_{\Omega} \rho N_j d\Omega &= 0 \end{aligned} \quad (3.109)$$

Como somente se utiliza condição de contorno de Neumann homogênea, a integral acima realizada na fronteira Γ anula-se e a equação (3.109) transforma-se em

$$\int_{\Omega} \varepsilon \text{Grad } \tilde{V} \text{Grad } N_j d\Omega = \int_{\Omega} \rho N_j d\Omega \quad (3.110)$$

Sabe-se que o elemento de volume em coordenadas cilíndricas é dado por:

$$d\Omega = r dr d\theta dz \quad (3.111)$$

Substituindo (3.111) em (3.110) obtém-se

$$\int_0^{2\pi} \int_r \int_z \varepsilon \text{Grad } \tilde{V} \text{Grad } N_j r dr d\theta dz = \int_0^{2\pi} \int_r \int_z \rho N_j r dr d\theta dz \quad (3.112)$$

O gradiente de uma função f qualquer em coordenadas cilíndricas é dado por:

$$\text{Grad } f = \frac{\partial f}{\partial r} \vec{u}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \vec{u}_\theta + \frac{\partial f}{\partial z} \vec{u}_z \quad (3.113)$$

onde \vec{u}_r , \vec{u}_θ e \vec{u}_z são os vetores unitários ortogonais do sistema de coordenadas cilíndricas.

Como existe simetria de revolução qualquer derivada na direção θ é nula. Assim

$$\text{Grad } \tilde{V} = \frac{\partial \tilde{V}}{\partial r} \vec{u}_r + \frac{\partial \tilde{V}}{\partial z} \vec{u}_z \quad (3.114)$$

e

$$\text{Grad } N_j = \frac{\partial N_j}{\partial r} \vec{u}_r + \frac{\partial N_j}{\partial z} \vec{u}_z \quad (3.115)$$

Substituindo (3.114) e (3.115) em (3.112) salientando que o modelo da figura 3.1b encontra-se no plano rz chega-se a

$$2\pi \int_r \int_z \epsilon \left[\frac{\partial \tilde{V}}{\partial r} \frac{\partial N_j}{\partial r} + \frac{\partial \tilde{V}}{\partial z} \frac{\partial N_j}{\partial z} \right] r \, dr \, dz = 2\pi \int_r \int_z \rho N_j r \, dr \, dz \quad (3.116)$$

Substituindo (3.104) em (3.116) e rearranjando os termos obtém-se

$$\sum_{i=1}^n \left[\int_r \int_z \epsilon \left[\frac{\partial N_i}{\partial r} \frac{\partial N_j}{\partial r} + \frac{\partial N_i}{\partial z} \frac{\partial N_j}{\partial z} \right] V_i r \, dr \, dz \right] = \int_r \int_z \rho N_j r \, dr \, dz \quad (3.117)$$

ou na forma matricial

$$K_{ji} V_i = F_j \quad (3.118)$$

onde $j=1, \dots, n$; $i=1, \dots, n$.

A matriz (n,n) de contribuições locais K_{ji} é simétrica como pode ser facilmente observado na equação (3.119)

$$K_{ji} = \int_r \int_z \epsilon \left[\frac{\partial N_i}{\partial r} \frac{\partial N_j}{\partial r} + \frac{\partial N_i}{\partial z} \frac{\partial N_j}{\partial z} \right] r \, dr \, dz \quad (3.119)$$

A matriz $(n,1)$ V_i representa as n incógnitas

$$V_i = \begin{bmatrix} V_1 \\ \vdots \\ V_n \end{bmatrix} \quad (3.120)$$

e a matriz $(n,1)$ de excitação F_j tem o termo de uma linha j qualquer dado por

$$F_j = \int_r \int_z \rho N_j r dr dz \quad (3.121)$$

As equações (3.117) e (3.118) são denominadas de equação de elementos finitos relativa a equação diferencial parcial (3.103).

Equações semelhantes podem ser obtidas para os dois outros casos que utilizam o potencial escalar apresentados no capítulo 2.

3.3.2 - Potencial Vetor: Axi-Simetria

Considere a situação física descrita na seção (2.2.4). A partir da equação (2.17), $\text{Div } \vec{B} = 0$, pode-se definir um potencial vetor magnético \vec{A} tal que

$$\vec{B} = \text{Rot } \vec{A} \quad (3.122)$$

desde que o divergente de um rotacional é sempre zero.

Como

$$\vec{B} = \mu \vec{H} \quad (3.123)$$

e

$$\text{Rot } \vec{H} = \vec{J} \quad (3.124)$$

obtém-se que

$$\text{Rot } \nu \text{ Rot } \vec{A} = \vec{J} \quad (3.125)$$

onde $\nu = 1/\mu = \text{relutividade magnética}$.

O rotacional de um vetor \vec{G} qualquer em coordenadas cilíndricas é dado por

$$\text{Rot } \vec{G} = \left[\frac{1}{r} \frac{\partial G_z}{\partial \theta} - \frac{\partial G_\theta}{\partial z} \right] \vec{u}_r + \left[\frac{\partial G_r}{\partial z} - \frac{\partial G_z}{\partial r} \right] \vec{u}_\theta + \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} (r G_\theta) - \frac{\partial G_r}{\partial \theta} \right] \vec{u}_z \quad (3.126)$$

$$\text{sendo } \vec{C} = C_r \vec{u}_r + C_\theta \vec{u}_\theta + C_z \vec{u}_z$$

Tanto o potencial vetor magnético quanto a densidade de corrente elétrica \vec{J} somente possuem componente na direção θ , ou seja

$$\vec{A} = A_\theta \vec{u}_\theta \quad (3.127)$$

e

$$\vec{J} = J_\theta \vec{u}_\theta \quad (3.128)$$

Assim, como não há dependência de grandezas em relação à θ , tem-se que

$$\vec{B} = \text{Rot } \vec{A} = - \frac{\partial A}{\partial z} \vec{u}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r A) \vec{u}_z \quad (3.129)$$

Substituindo (3.129) em (3.125) lembrando que a densidade de corrente possui somente componente na direção θ obtém-se

$$- \frac{\partial}{\partial z} \nu \frac{\partial A}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial r} \left[\nu \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r A) \right] = J \quad (3.130)$$

ou desenvolvendo

$$\frac{\partial}{\partial z} \nu \frac{\partial A}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial r} \nu \frac{\partial A}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\nu A}{r} \right) = -J \quad (3.131)$$

ou ainda

$$\frac{\partial}{\partial z} \nu \frac{\partial A}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial r} \left[\nu \left(\frac{\partial A}{\partial r} + \frac{A}{r} \right) \right] = -J \quad (3.132)$$

Se o método de Galerkin fosse aplicado na equação diferencial parcial (3.132) seria obtido uma matriz de contribuições locais K_{ji} não simétrica (Bastos [2]). Para se eliminar esse inconveniente é definida uma variável A' (Bastos [2]) tal que

$$A' = r A \quad (3.133)$$

ou seja

$$A = \frac{A'}{r} \quad (3.134)$$

É interessante observar que a equação (3.134) não é válida em $r=0$.

Substituindo (3.134) em (3.132) obtém-se após alguns desenvolvimentos algébricos

$$\frac{\partial}{\partial z} \frac{\nu}{r} \frac{\partial A'}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial r} \frac{\nu}{r} \frac{\partial A'}{\partial r} + J = 0 \quad (3.135)$$

A equação diferencial parcial acima produz uma matriz de contribuições locais K_j , simétrica quando é aplicado o método de Galerkin.

Assim seja \tilde{A}' uma solução aproximada da equação diferencial (3.135)

$$\tilde{A}' = \sum_{i=1}^n A'_i N_i \quad (3.136)$$

A substituição de (3.136) em (3.135) gera um resíduo E

$$\frac{\partial}{\partial z} \frac{\nu}{r} \frac{\partial \tilde{A}'}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial r} \frac{\nu}{r} \frac{\partial \tilde{A}'}{\partial r} + J = E \quad (3.137)$$

que deve ser projetado ortogonalmente no espaço gerado pelas n funções teste e o resultado deve ser feito igual a zero. Assim

$$(E, N_j) = 0 \quad (3.138)$$

ou

$$\int_{\Omega} E N_j d\Omega = 0 \quad (3.139)$$

ou ainda substituindo (3.137) em (3.139)

$$\int_r \int_z \left[\frac{\partial}{\partial z} \frac{\nu}{r} \frac{\partial \tilde{A}'}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial r} \frac{\nu}{r} \frac{\partial \tilde{A}'}{\partial r} \right] N_j dr dz = - \int_r \int_z J N_j dr dz \quad (3.140)$$

Integrando por partes o lado esquerdo da equação (3.140) lembrando que somente se utiliza condição de contorno de Neumann homogênea obtém-se

$$\int_r \int_z \frac{\nu}{r} \left[\frac{\partial \tilde{A}'}{\partial z} \frac{\partial N_j}{\partial z} + \frac{\partial \tilde{A}'}{\partial r} \frac{\partial N_j}{\partial r} \right] dr dz = \int_r \int_z J N_j dr dz \quad (3.141)$$

Substituindo (3.136) em (3.141) e rearranjando os termos obtém-se

$$\sum_{i=1}^n \left[\int_r \int_z \frac{\nu}{r} \left[\frac{\partial N_i}{\partial z} \frac{\partial N_j}{\partial z} + \frac{\partial N_i}{\partial r} \frac{\partial N_j}{\partial r} \right] A'_i dr dz \right] = \int_r \int_z J N_j dr dz \quad (3.142)$$

ou na forma matricial

$$K_{ji} A'_i = F_j \quad (3.143)$$

onde $j=1, \dots, n$; $i=1, \dots, n$.

A matriz (n,n) de contribuições locais K_{ji} tem o termo da linha j , coluna i dado por

$$K_{ji} = \int_r \int_z \frac{\nu}{r} \left[\frac{\partial N_i}{\partial z} \frac{\partial N_j}{\partial z} + \frac{\partial N_i}{\partial r} \frac{\partial N_j}{\partial r} \right] dr dz \quad (3.144)$$

que, como pode ser observado, é uma matriz simétrica.

A matriz $(n,1)$ A'_i representa as n incógnitas

$$A'_i = \begin{bmatrix} A'_1 \\ \vdots \\ A'_n \end{bmatrix} \quad (3.145)$$

e a matriz $(n,1)$ F_j de excitação tem o termo de uma linha j qualquer dado por

$$F_j = \int_r \int_z J N_j dr dz \quad (3.146)$$

As equações (3.142) e (3.143) são denominadas de equação elementos finitos relativa a equação diferencial parcial (3.135) quando as funções teste N_k são obtidas pelo método de elementos finitos.

Equações semelhantes podem ser obtidas para os dois outros casos que

utilizam potencial vetor apresentados no capítulo 2.

3.4 - Conclusão - Capítulo 3

Nesse capítulo foram desenvolvidas todas as equações de elementos finitos dos problemas apresentados no capítulo 2.

É importante observar a semelhança existente entre as equações (3.24), (3.38), (3.45), (3.79) e (3.97) que definem as matrizes de contribuições locais para cada problema tratado com simetria longitudinal. Além disso, o fato da matriz K_{ji} ser simétrica em todas as situações é também muito importante.

As mesmas considerações feitas acima são válidas para os problemas tratados com simetria axial.

CAPÍTULO 4

O Elemento Finito Triangular Subparamétrico de Segunda Ordem

Neste capítulo será apresentado o elemento finito triangular subparamétrico de segunda ordem.

Será também desenvolvida a matriz de contribuições locais K_j para um dos casos tratados nos capítulos 2 e 3 como um exemplo de aplicação da formulação do elemento de segunda ordem.

Serão também introduzidos dois métodos numéricos de integração.

4.1 - O Elemento de Segunda Ordem

O elemento finito triangular subparamétrico de segunda ordem do tipo Lagrangeano, continuidade C^0 , está representado genericamente na figura 4.1b. É chamado de subparamétrico porque a função de interpolação geométrica não é idêntica à função de interpolação de potencial como será mostrado abaixo

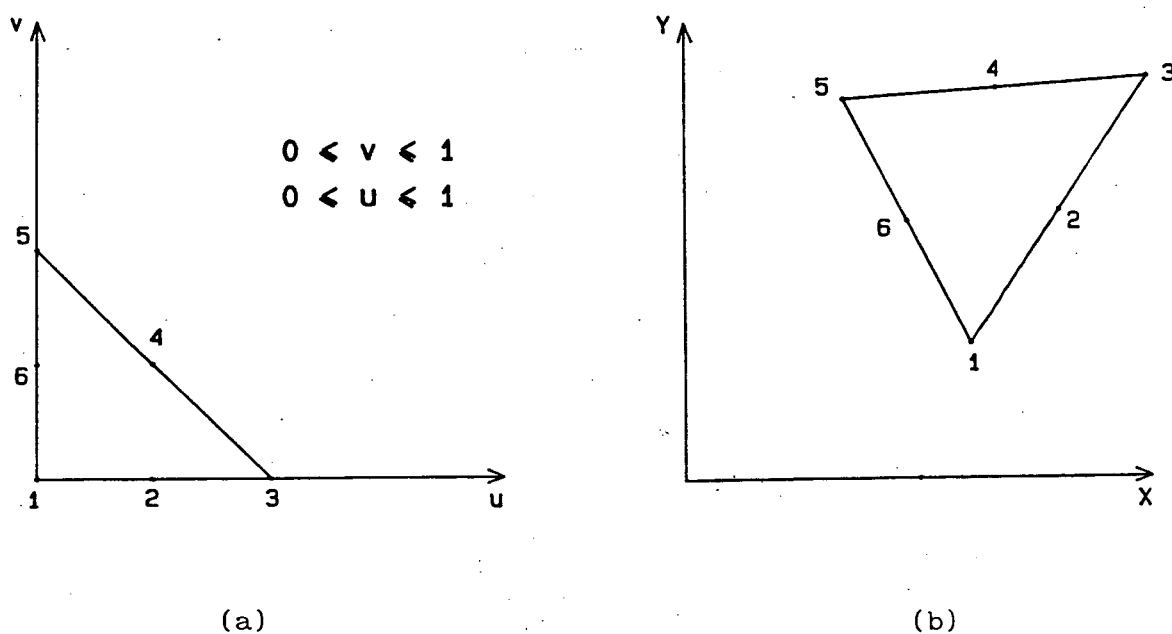


Figura 4.1 - O Elemento de Segunda Ordem

onde as coordenadas dos nós 2, 4 e 6 são dadas por

$$X_2 = \frac{X_1 + X_3}{2} \quad ; \quad Y_2 = \frac{Y_1 + Y_3}{2}$$

$$X_4 = \frac{X_3 + X_5}{2} \quad ; \quad Y_4 = \frac{Y_3 + Y_5}{2}$$

$$X_6 = \frac{X_5 + X_1}{2} \quad ; \quad Y_6 = \frac{Y_5 + Y_1}{2}$$

O elemento de referência da figura 4.1a é utilizado visando facilitar as operações algébricas envolvidas no processo de cálculo (Bastos [2]). Sendo mais específico, no caso do elemento em questão aplicado aos problemas apresentados nos capítulos anteriores, a mudança de sistema de coordenadas facilita a aplicação de métodos de integração numérica necessários na resolução de equações integrais como será visto posteriormente.

A relação entre o elemento genérico mostrado na figura 4.1b e o elemento de referência da figura 4.1a é feita através das seguintes funções de transformação geométrica que podem ser obtidas após algum algebrismo (Bastos [2]; Chung [5]; Dhatt [7]; Sabonnadière [21])

$$N_1(u, v) = 1 - 3u - 3v + 2u^2 + 4uv + 2v^2 \quad (4.1)$$

$$N_2(u, v) = 4u - 4u^2 - 4uv \quad (4.2)$$

$$N_3(u, v) = -u + 2u^2 \quad (4.3)$$

$$N_4(u, v) = 4uv \quad (4.4)$$

$$N_5(u, v) = -v + 2v^2 \quad (4.5)$$

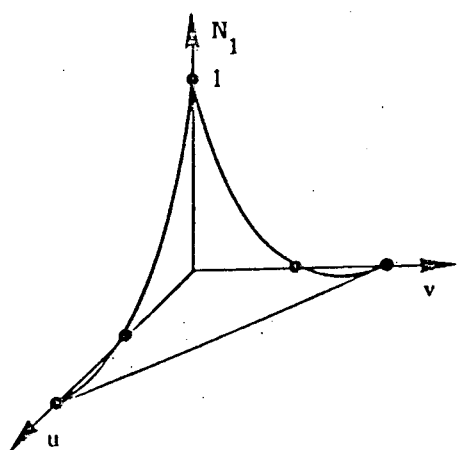
$$N_6(u, v) = 4v - 4uv - 4v^2 \quad (4.6)$$

que são apresentadas graficamente na figura 4.2.

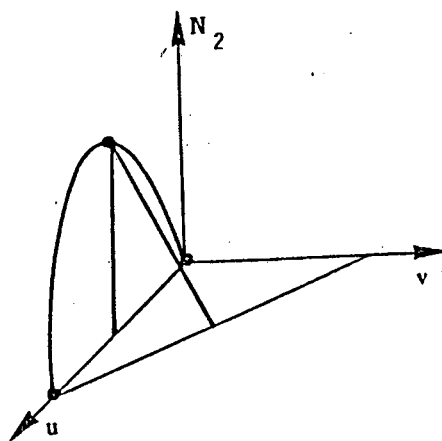
Assim, as coordenadas cartesianas (x, y) de um ponto P qualquer pertencente ao elemento finito são dadas por:

$$x = \sum_{i=1}^6 N_i(u, v) x_i \quad (4.7)$$

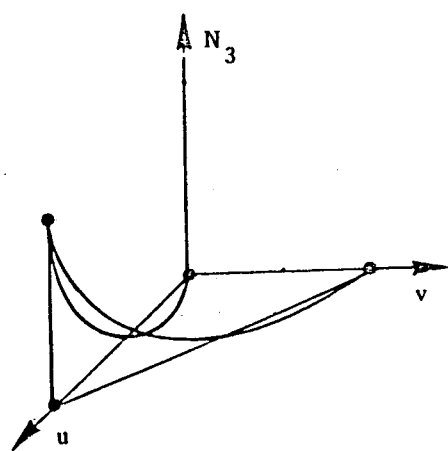
$$y = \sum_{i=1}^6 N_i(u, v) y_i \quad (4.8)$$



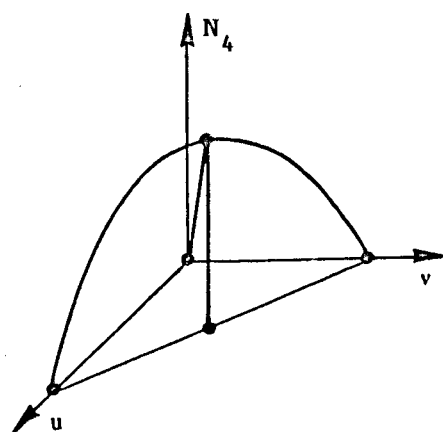
(a)



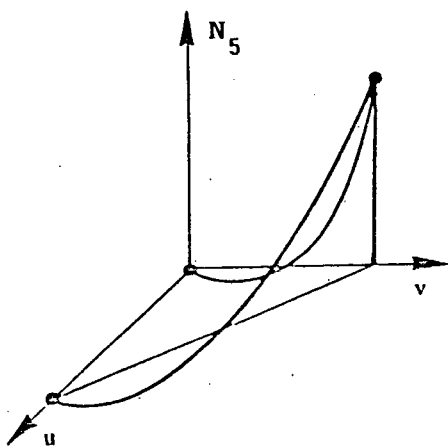
(b)



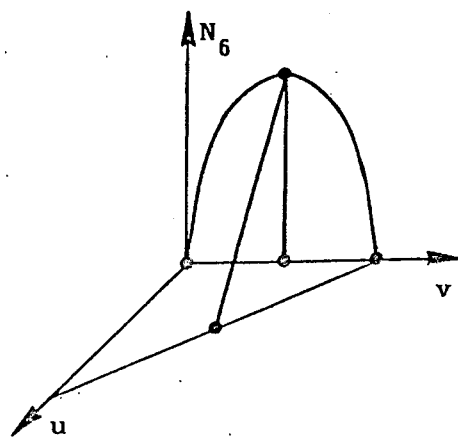
(c)



(d)



(e)



(f)

Figura 4.2 - As Funções de Interpolação.

Como os nós 2, 4 e 6, veja figura 4.1b, são os pontos médios das arestas no elemento finito triangular de segunda ordem subparamétrico, as equações (4.7) e (4.8), após serem desenvolvidas, podem ser escritas como a seguir:

$$x = \begin{bmatrix} \left(\frac{N1}{2} + \frac{N2}{2} + \frac{N6}{2} \right) & \left(\frac{N2}{2} + N3 + \frac{N4}{2} \right) & \left(\frac{N4}{2} + N5 + \frac{N6}{2} \right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x1 \\ x3 \\ x5 \end{bmatrix} \quad (4.9)$$

e

$$y = \begin{bmatrix} \left(\frac{N1}{2} + \frac{N2}{2} + \frac{N6}{2} \right) & \left(\frac{N2}{2} + N3 + \frac{N4}{2} \right) & \left(\frac{N4}{2} + N5 + \frac{N6}{2} \right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y1 \\ y3 \\ y5 \end{bmatrix} \quad (4.10)$$

Pode-se observar nas equações (4.9) e (4.10) que as coordenadas (x,y) de um ponto qualquer do elemento subparamétrico são, então, obtidas em função somente das coordenadas dos nós 1, 3 e 5. Este é o motivo pelo qual este elemento é chamado de subparamétrico pois, como será apresentado logo abaixo, a função de interpolação do potencial dependerá do potencial no seis nós do elemento.

As funções de transformação geométrica dadas acima são, de acordo com o método de elementos finitos, utilizadas como funções de interpolação (funções teste) dos potenciais escalares e vetores (Bastos [2]; Chung [5]; Dhatt [7]; Sabonnadière [21]; Silvester [22]). Assim, por exemplo, a solução aproximada da equação diferencial parcial (3.47) \tilde{A} representada pela equação (3.51) será agora escrita como

$$\tilde{A} = \sum_{i=1}^n N_i(u,v) A_i \quad (4.11)$$

onde A_i , $i=1, \dots, 6$, são os valores a serem determinados do potencial vetor magnético em cada um dos seis nós do elemento genérico da figura 4.1b e $N_i(u,v)$, $i=1, \dots, 6$, são as funções teste representadas pelas equações (4.1), ..., (4.6).

Desenvolvendo a equação (4.11) obtém-se que

$$\begin{aligned}\tilde{A} = & (2A_1 - 4A_2 + 2A_3)u^2 + (2A_1 + 2A_5 - 4A_6)v^2 + \\ & (-3A_1 + 4A_2 - A_3)u + (-3A_1 - A_5 + 4A_6)v + \\ & (4A_1 - 4A_2 + 4A_4 - 4A_6)uv + A_1\end{aligned}\quad (4.12)$$

É importante observar na equação (4.12) acima que a solução aproximada \tilde{A} varia quadraticamente com relação as coordenadas de referência (u,v). Assim pode-se afirmar que dentro de um elemento finito triangular subparamétrico de segunda ordem o potencial varia quadraticamente. Além disso, substituindo (4.12) em (2.44), pode-se observar que a indução magnética \vec{B} , e consequentemente o campo magnético \vec{H} , varia linearmente dentro de um elemento finito triangular subparamétrico de segunda ordem.

Visando exemplificar a aplicação do elemento finito triangular de segunda ordem considere a equação de elementos finitos (3.62) desenvolvida na seção (3.2.4) relativa à equação diferencial parcial (3.47)

$$K_{ji} A_i = F_j, \quad j=1, \dots, n; \quad i=1, \dots, n \quad (4.13)$$

onde

$$K_{ji} = \iint \nu \left[\frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial x} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial N_j}{\partial y} \right] dx dy \quad (4.14)$$

$$A_i = \begin{bmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_n \end{bmatrix} \quad (4.15)$$

$$F_j = \iint J N_j dx dy \quad (4.16)$$

Como as equações integrais (4.14) e (4.16) estão associadas ao sistema cartesiano de coordenadas (x,y) é necessário que se defina uma transformação de modo que essas equações possam ser trabalhadas no sistema de coordenadas de referência (u,v) (Bastos [2]; Chung [5]; Dhatt [7]). Assim sendo, seja $N_i(u,v)$ uma função teste qualquer. Pela regra da cadeia tem-se que:

$$\frac{\partial N_i}{\partial u} = \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial u} \quad (4.17)$$

$$\frac{\partial N_i}{\partial v} = \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial v} \quad (4.18)$$

ou na forma matricial

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial u} \\ \frac{\partial N_i}{\partial v} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} \end{bmatrix} = [J] \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} \end{bmatrix} \quad (4.19)$$

onde a matriz $[J]$ é chamada de matriz jacobiana. Os termos da matriz $[J]$ podem ser obtidos facilmente das equações (4.7) e (4.8).

Da equação (4.19) obtém-se que

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial u} \\ \frac{\partial N_i}{\partial v} \end{bmatrix} = [J]^{-1} \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial u} \\ \frac{\partial N_i}{\partial v} \end{bmatrix} \quad (4.20)$$

ou seja, as derivadas da função teste N_i em relação às coordenadas cartesianas estão relacionadas com as derivadas da função N_i em relação às coordenadas de referência através da matriz jacobiana invertida. Além disso, como demonstrado por Chung [5], tem-se que

$$\iint dx dy = \iint |J| du dv \quad (4.21)$$

onde $|J|$ é o determinante da matriz jacobiana.

Assim, lembrando que o subíndice n da equação (4.15) é igual a 6 no caso do elemento finito triangular de segunda ordem e observando as equações (4.20) e (4.21), as equações (4.14), (4.15) e (4.16) transformam-se em

$$K_{ji} = \int_u \int_v v \left[\left(\frac{\partial N_i}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial N_i}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial N_j}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial N_j}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \right. \\ \left. \left(\frac{\partial N_i}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial N_i}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial N_j}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial N_j}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y} \right) \right] |J| du dv \quad (4.22)$$

$$A_i = \begin{bmatrix} A1 \\ \vdots \\ A6 \end{bmatrix} \quad (4.23)$$

$$F_j = \int_u \int_v J N_j |J| du dv \quad (4.24)$$

onde $j=1, \dots, 6$; $i=1, \dots, 6$.

A matriz (6,6) de contribuições locais K_{ji} continua sendo uma matriz simétrica após a mudança de sistema de coordenadas como pode ser observado na equação (4.22), ou seja

$$K_{ji} = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} & K_{14} & K_{15} & K_{16} \\ & K_{22} & K_{23} & K_{24} & K_{25} & K_{26} \\ & & K_{33} & K_{34} & K_{35} & K_{36} \\ & & & K_{44} & K_{45} & K_{46} \\ & \text{simétrico} & & & K_{55} & K_{56} \\ & & & & & K_{66} \end{bmatrix} \quad (4.25)$$

Assim, por exemplo, o termo K_{35} da matriz de contribuições locais representada acima é dado por:

$$K_{35} = \int_u \int_v v \left[\left(\frac{\partial N_5}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial N_5}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial N_3}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial N_3}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \right. \\ \left. \left(\frac{\partial N_5}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial N_5}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial N_3}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial N_3}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y} \right) \right] |J| du dv \quad (4.26)$$

Das equações (4.3) e (4.5) obtém-se que

$$\frac{\partial N_3}{\partial u} = -1 + 4u \quad (4.27)$$

$$\frac{\partial N_3}{\partial v} = 0 \quad (4.28)$$

$$\frac{\partial N_5}{\partial u} = 0 \quad (4.29)$$

$$\frac{\partial N_5}{\partial v} = -1 + 4v \quad (4.30)$$

e os termos relacionados com a matriz jacobiana e com a sua inversa são obtidos das equações (4.7) e (4.8) como mencionado anteriormente.

O termo K_{35} é obtido após a integração da equação (4.26) na área do

triângulo de referência da figura 4.1a. É interessante observar que o integrando da equação (4.22) ou, em particular, da equação (4.26) será sempre uma função polinomial das coordenadas de referência u e v . Por isso essa integração terá que ser realizada utilizando-se um método numérico de integração pois não é prático e usual a utilização de integração analítica (Bastos [2]).

Foram implementados com sucesso o método de integração de Gauss-Radau e o método de integração Direto (Dhatt [7]).

Tabela 4.1: Constantes de Gauss-Radau

ordem de integra ção	número de pontos r x r	R_i	W_i	S_j	A_j
1	1 x 1	0,5	1,0	0,3333333333	0,75
3	2 x 2	0,2113248654 0,7886751346	0,5 0,5	0,1550510257 0,6449489743	0,3764030627 0,5124858262
5	3 x 3	0,1127016654 0,5 0,8872983346	0,2777777778 0,4444444444 0,2777777778	0,0885879595 0,4094668644 0,7876594618	0,2204622112 0,3881934688 0,3288443200
7	4 x 4	0,0694318442 0,3300094782 0,6699905218 0,9305681558	0,1739274226 0,3260725774 0,3260725774 0,1739274226	0,0571041961 0,2768430136 0,5835904324 0,8602401357	0,1437135608 0,2813560151 0,3118265230 0,2231039011
9	5 x 5	0,0469100770 0,2307653449 0,5 0,7692346551 0,9530899230	0,1184634425 0,2393143353 0,2844444444 0,2393143353 0,1184634425	0,0398098571 0,1980134179 0,4379748102 0,6954642734 0,9014649142	0,1007941926 0,2084506672 0,2604633916 0,2426935942 0,1598203766

Pelo método de Gauss-Radau a integral de uma função $f(u,v)$ na área do triângulo de referência da figura 4.1a será escrita como (Dhatt [7])

$$\int_0^1 \int_0^{1-v} f(u,v) du dv = \sum_{j=1}^r \sum_{i=1}^r W_j(j) W_i(i) f(u_j, v_i) \quad (4.31)$$

onde

$$W_j(j) = A_j(j) (1 - S_j(j)) \quad (4.32)$$

$$u_j = S_j(j) \quad (4.33)$$

$$v_{ij} = RL(i) (1 - S_j(j)) \quad (4.34)$$

As constantes $A_j(j)$, $S_j(j)$ e $RL(i)$ utilizadas nas equações (4.31), (4.32), (4.33) e (4.34) são apresentadas na tabela 4.1.

Por outro lado, pelo método Direto a integral de uma função $f(u,v)$ na área do triângulo de referência da figura 4.1a será escrita como

$$\int_0^1 \int_0^{1-v} f(u,v) du dv = \sum_{i=1}^r W_i f(u,v) \quad (4.35)$$

Na tabela 4.2 são apresentados alguns valores para os pontos de integração (u_i, v_i) e para os seus respectivos pesos W_i .

Como exemplo de aplicação do método de integração Direto considere a equação (4.35). Suponha que o termo de maior grau da função polinomial $f(u,v)$ tenha ordem 3, ou seja, $u^i v^j$, $i + j \leq 3$. Pela tabela 4.2 serão necessários utilizar 4 pontos de integração que proporcionarão a integração exata de um polinômio de ordem 3. Assim obtém-se que

$$\begin{aligned} \int_0^1 \int_0^{1-v} f(u,v) du dv &= \sum_{i=1}^4 W_i f(u,v) = W_1 f(u_1, v_1) + W_2 f(u_2, v_2) + \\ &W_3 f(u_3, v_3) + W_4 f(u_4, v_4) = \frac{-27}{96} f\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) + \frac{25}{96} f\left(\frac{1}{5}, \frac{1}{5}\right) + \\ &\frac{25}{96} f\left(\frac{3}{5}, \frac{1}{5}\right) + \frac{25}{96} f\left(\frac{1}{5}, \frac{3}{5}\right) \end{aligned} \quad (4.36)$$

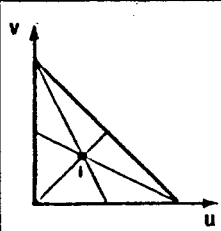
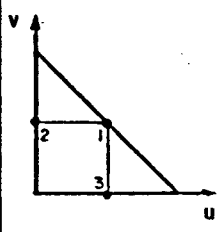
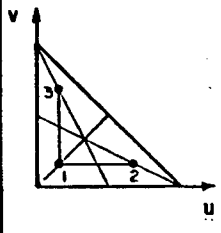
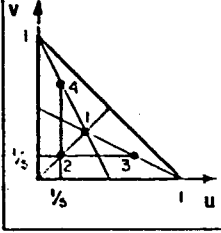
Pelo método de Gauss-Radau seriam necessários 2 pontos na direção u e 2 pontos na direção v como pode ser observado na tabela 4.2.

Para a integração de (4.22) no caso do elemento de segunda ordem foram utilizados 2 pontos na direção u e 2 pontos na direção v para o método de Gauss-Radau e 4 pontos para o método Direto. Não houve melhoria nos resultados obtidos quando se aumentou o número de pontos de integração para nenhum dos dois métodos. Pode-se afirmar que os resultados obtidos com os dois métodos de integração foram praticamente idênticos e satisfatórios.

Com a matriz (6,6) de contribuições locais K_{ji} obtida é necessário que

seja feita a sua condensação na matriz de contribuição global KK (Bastos [2]; Chung [5]; Dhatt [7]; Sabonnadière [21]). Esse processo será realizado para todos os elementos finitos existentes na malha.

Tabela 4.2: Constantes Método Direto

	ordem integra ção	numero de pontos r	coordenadas		pesos W_i
			u_i	v_i	
	1	1	1/3	1/3	1/2
	2	3	1/2 0 1/2	1/2 1/2 0	1/6
	2	3	1/6 2/3 1/6	1/6 1/6 2/3	1/6
	3	4	1/3 1/5 3/5 1/5	1/3 1/5 1/5 3/5	$- 27/96$ $25/96$

Considerações semelhantes devem ser feitas com relação a matriz (6,1) de

excitação F_j e com relação a matriz de excitação global FF .

A forma como a matriz de contribuição global KK será armazenada é de fundamental importância pois existe um problema de alocação de memória que é particularmente crítico nos microcomputadores disponíveis. As características da matriz global KK de ser simétrica e de ser uma matriz banda são levadas em consideração no momento do armazenamento. Para maiores detalhes veja Bastos [2], Dhatt [7] e Sabonnadière [21].

Após a condensação das matrizes referentes a todos os elementos obtém-se o seguinte sistema de nno equações

$$KK A = FF \quad (4.37)$$

onde nno é o número total de nós da malha de elementos finitos. Como é sabido, existe uma equação para cada nó da malha de elementos finitos.

É neste instante, com o sistema global de equações formado, que é feito a inserção das condições de contorno de Dirichlet, ou seja, deve-se inserir os potenciais impostos nos nós do contorno onde existe condição de Dirichlet. Bastos [2] e Chung [5] fazem uma boa apresentação das principais maneiras de inserção desta condição de contorno.

Com o sistema de nno equações formado e as condições de contorno de Dirichlet inseridas deve-se passar a etapa de resolução do sistema de equações representado pela expressão (4.37).

Da equação (4.22) pode-se observar que se o valor da relutividade magnética $\nu=1/\mu$ (μ =permeabilidade magnética) depender da intensidade do campo magnético o sistema de equações (4.37) será não-linear. Caso contrário o sistema de equações será linear.

O método de eliminação de Gauss foi o método implementado para resolução de sistemas lineares (Bastos [2]; Chung [5]; Dhatt [7]; Sabonnadière [21]). Foram utilizados o método de aproximações sucessivas e o método de Newton-Raphson na resolução dos sistemas não-lineares (Bastos [2]; Chung [5]; Dhatt [7]; Sabonnadière [21]).

A resolução de (4.37) fornece o valor do potencial vetor magnético em cada um dos nno nós da malha de elementos finitos. Com esses valores e com a equação (4.12) pode-se obter o valor do potencial vetor magnético em qualquer ponto da região estudada.

4.2 - Conclusão - Capítulo 4

Nesse capítulo foi apresentado o elemento finito triangular subparamétrico de segunda ordem.

A matriz (6,6) de contribuições locais K_{ji} para um dos casos tratados nos capítulos 2 e 3 foi também desenvolvida.

Foi feita uma introdução aos métodos numéricos de integração Direto e Gauss-Radau.

É importante salientar que a necessidade de método numérico de integração fará com que o tempo computacional necessário para o cálculo dos casos tratados com elementos de segunda ordem seja bastante superior ao tempo gasto nos mesmos casos, com um número semelhante de nós, mas com elementos de primeira ordem que não utilizam métodos de integração. No capítulo 6 serão apresentados alguns resultados comparativos.

Capítulo 5

O Pós-Processamento

Neste capítulo será apresentada a etapa de pós-processamento do programa de cálculo de campo pelo método de elementos finitos utilizando um elemento triangular de segunda ordem subparamétrico.

Serão propostas duas formas de apresentação gráfica dos resultados e serão descritas as diversas rotinas utilizadas na obtenção de grandezas físicas relevantes das estruturas eletromagnéticas simuladas.

5.1 - Apresentação Gráfica dos Resultados

O traçado de linhas equipotenciais é de grande utilidade na verificação dos resultados numéricos obtidos pelo método de elementos finitos aplicado em problemas bidimensionais.

O tratamento gráfico permite uma inspeção muito eficiente da solução numérica obtida. Através de simples observação pode-se detectar problemas de definição da estrutura estudada como, por exemplo, erros na imposição das condições de contorno. Além disso uma análise qualitativa do fenômeno físico pode ser feita através de simples visualização. Assim, por exemplo, pode-se observar a região onde está havendo maior saturação, maior dispersão de fluxo, etc. Muitas vezes a simples visualização de um conjunto de linhas equipotenciais é suficiente para se constatar que a estrutura em estudo é inadequada.

Tendo em vista a importância do tratamento gráfico na análise dos resultados implementou-se duas formas de traçado de linhas equipotenciais em uma malha de elementos finitos de segunda ordem. As duas grandes diferenças entre estas duas maneiras de traçado são o tempo de processamento gasto por cada uma e a qualidade do traçado das linhas equipotenciais.

Essas duas formas de traçado são apresentadas a seguir.

5.1.1 - Traçado via Aproximação Linear

É uma forma de traçado de linhas equipotenciais de relativa facilidade de implementação e que proporciona resultados em um tempo computacional relativamente baixo.

Esse método consiste na divisão do elemento finito triangular subparamétrico de segunda ordem em quatro elementos finitos triangulares de primeira ordem como mostrado na figura 5.1b abaixo.

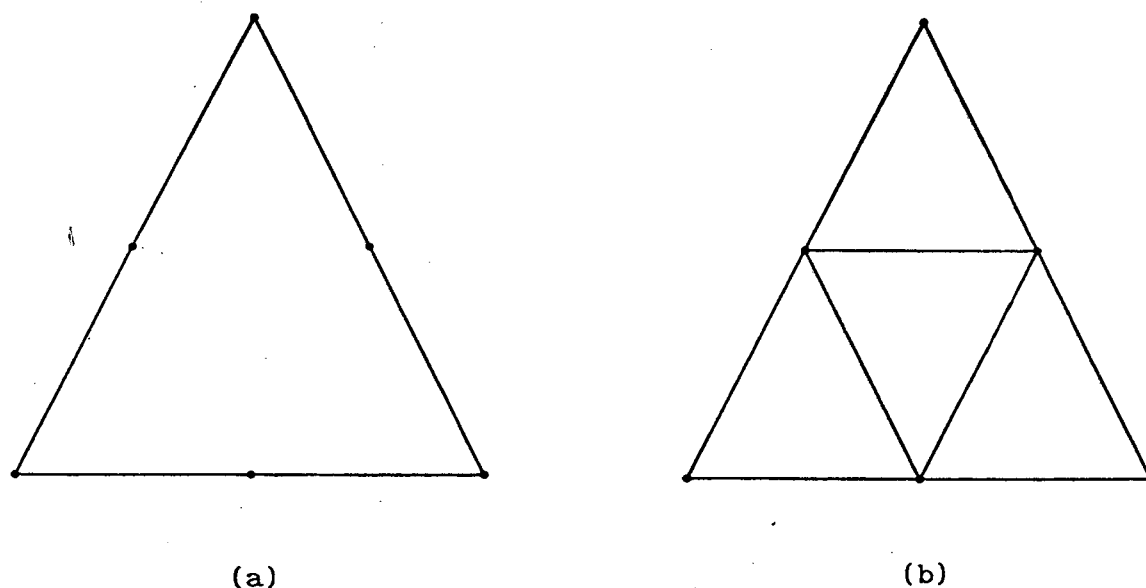


Figura 5.1

Essa divisão é feita em todos os elementos de segunda ordem da malha de elementos finitos.

O traçado de uma linha equipotencial será feito agora numa malha com elementos de primeira ordem. É interessante observar que esta nova malha de primeira ordem possui quatro vezes mais elementos que a malha de segunda ordem.

Para exemplificar sucintamente como é feito o traçado de uma equipotencial de valor A_1 em um elemento de primeira ordem, considere o elemento da figura 5.2 onde o valor dos potenciais em cada um dos nós está fornecido em função de um potencial qualquer A_1 .

Primeiro deve-se constatar se a equipotencial de valor A_1 corta o elemento em questão. Isso é feito através de uma simples comparação com os valores máximo e mínimo dos potenciais dos nós deste elemento. Se o valor A_1 for menor ou igual ao máximo potencial dos nós e maior ou igual ao mínimo potencial dos nós o elemento será cortado pela equipotencial A_1 . Observe a figura 5.2.

A determinação do corte nas duas arestas do elemento pela equipotencial é feita interpolando o valor do potencial entre os dois nós de cada aresta.

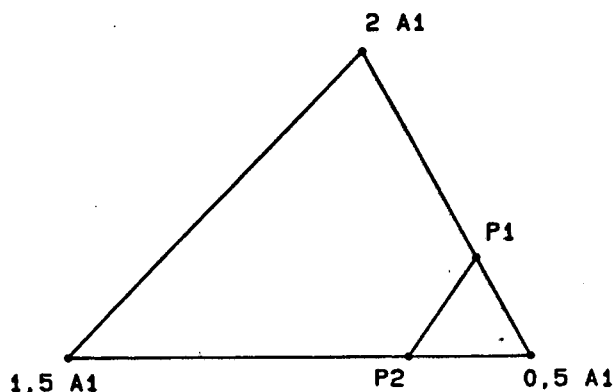


Figura 5.2

Como é sabido, o potencial varia linearmente dentro de um elemento de primeira ordem. Assim, conhecendo-se os pontos $P1$ e $P2$, veja figura 5.2, basta ligá-los por uma reta.

Esse procedimento é feito para todos os elementos de primeira ordem da malha transformada. Todos os segmentos $P1P2$, ponto inicial e final, são armazenados em matrizes, ordenados e gravados em arquivos para uso posterior.

Esta forma de traçado de linha equipotencial poderá gerar ou não bons resultados dependendo da densidade de elementos da malha inicial. Porém, como não existe necessidade de malhas muito refinadas para se obter bons resultados com elementos de segunda ordem, é bastante comum traçados grosseiros quando se utiliza esse procedimento. Uma maneira de se solucionar esse inconveniente é fazer uma maior partição do elemento de segunda ordem como, por exemplo, mostrado na figura 5.3 abaixo (Meek [13])

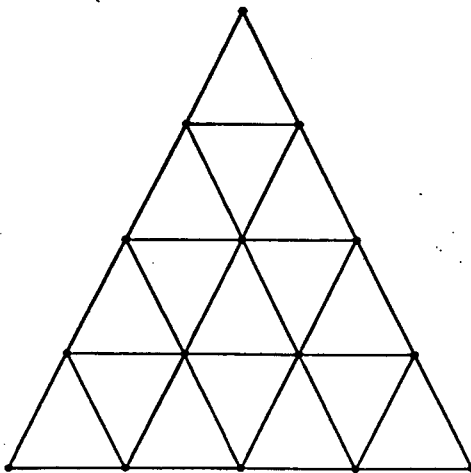


Figura 5.3

Os valores do potencial nos novos nós da figura 5.3 podem ser obtidos utilizando-se a equação (4.12).

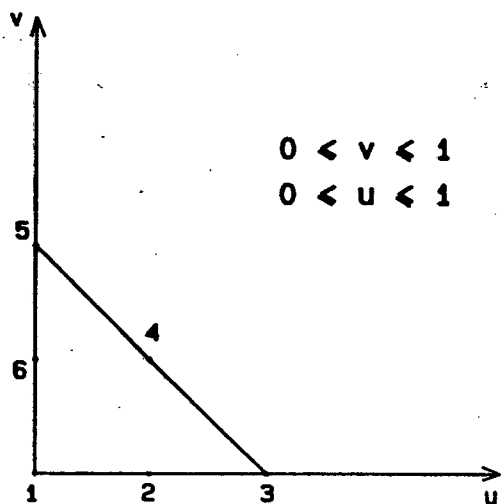
5.1.2 - Traçado via Aproximação Quadrática

É uma forma de traçado de linhas equipotenciais que possibilita a obtenção de resultados com uma precisão bastante superior à obtida com o procedimento exposto na seção anterior.

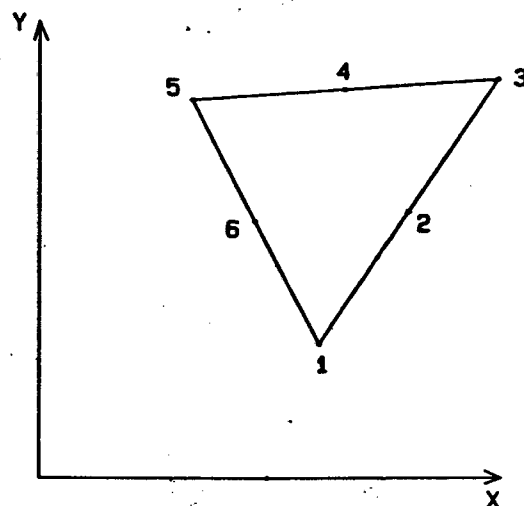
Contudo, essa maior precisão é obtida às custas de um aumento no tempo de processamento e de uma maior dificuldade na implementação e no ajuste do método de traçado.

Essa maneira de traçado de equipotenciais parte do princípio de que o potencial, vetor ou escalar, varia quadraticamente dentro de um elemento finito triangular subparamétrico de segunda ordem.

Considere o elemento triangular de segunda ordem, genérico, apresentado na figura 5.4b. Na figura 5.4a é apresentado o respectivo elemento de referência.



(a)



(b)

Figura 5.4

Da equação (4.12) tem-se que o potencial vetor magnético dentro do elemento de referência da figura 5.4a é dado por:

$$\begin{aligned} \tilde{A} = & (2A_1 - 4A_2 + A_3)u^2 + (2A_1 + 2A_5 - 4A_6)v^2 + (-3A_1 + 4A_2 - A_3)u + \\ & (-3A_1 - A_5 + 4A_6)v + (4A_1 - 4A_2 + 4A_4 - 4A_6)uv + A_1 \end{aligned} \quad (5.1)$$

onde A_i , $i=1, \dots, 6$, são os valores do potencial vetor magnético nos nós 1, 2, 3, 4, 5 e 6 respectivamente.

Suponha que se deseja traçar a equipotencial de valor A_p no elemento finito de segunda ordem apresentado na figura 5.4b.

É necessário verificar, em primeiro lugar, se a equipotencial de valor A_p corta o elemento em questão. Para isto considere a equação (5.1) reescrita abaixo após a introdução do valor A_p .

$$(2A_1 - 4A_2 + A_3)u^2 + (2A_1 + 2A_5 - 4A_6)v^2 + (-3A_1 + 4A_2 - A_3)u + (-3A_1 - A_5 + 4A_6)v + (4A_1 - 4A_2 + 4A_4 - 4A_6)uv + A_1 - A_p = 0 \quad (5.2)$$

A equipotencial A_p passa pelo elemento em questão se ela corta as arestas do elemento de referência da figura 5.4a. Assim considere as três equações das retas as quais as arestas do elemento de referência pertencem:

$$\text{Aresta 1:} \quad \gg \quad v = 0 \quad (5.3)$$

$$\text{Aresta 2:} \quad \gg \quad u = 0 \quad (5.4)$$

$$\text{Aresta 3:} \quad \gg \quad u = 1 - v \quad (5.5)$$

A substituição da equação (5.3) em (5.2) fornecerá uma equação de segundo grau em u cuja solução será analisada para se determinar se a aresta 1 será cortada pela equipotencial A_p . Assim substituindo (5.3) em (5.2) obtém-se

$$(2A_1 - 4A_2 + A_3)u^2 + (-3A_1 + 4A_2 - A_3)u + A_1 - A_p = 0 \quad (5.6)$$

ou simplificando

$$a_1 u^2 + b_1 u + c_1 = 0 \quad (5.7)$$

onde

$$a_1 = 2A_1 - 4A_2 + A_3$$

$$b_1 = -3A_1 + 4A_2 - A_3$$

$$c_1 = A_1 - A_p$$

Resolvendo a equação (5.7) obtém-se as seguintes raízes

$$\text{raiz1} = \frac{-b_1 + \sqrt{b_1^2 - 4a_1c_1}}{2a_1} \quad (5.8)$$

$$\text{raiz2} = \frac{-b_1 - \sqrt{b_1^2 - 4a_1c_1}}{2a_1} \quad (5.9)$$

Se raiz1 for maior ou igual a zero e menor ou igual a um ou raiz2 for maior ou igual a zero ou menor ou igual a um a equipotencial de valor A_p cortará a aresta $v = 0$ do elemento analisado.

É importante observar que é possível achar situações em que a equipotencial cortará uma aresta em dois pontos. Assim, por exemplo, no caso da situação em questão a equipotencial A_p cortaria a aresta $v = 0$ nos seguintes pontos:

ponto 1 »» (raiz1,0)

ponto 2 »» (raiz2,0)

O mesmo procedimento deve ser feito para as outras duas arestas. Assim substituindo (5.4) em (5.2) obtém-se

$$(2A_1 + 2A_5 - 4A_6)v^2 + (-3A_1 - A_5 + 4A_6)v + A_1 - A_p = 0 \quad (5.10)$$

ou simplificando

$$a_2 v^2 + b_2 v + c_2 = 0 \quad (5.11)$$

Resolvendo a equação (5.11) obtém-se as seguintes raízes:

$$\text{raiz1} = \frac{-b_2 + \sqrt{b_2^2 - 4a_2c_2}}{2a_2} \quad (5.12)$$

$$\text{raiz2} = \frac{-b_2 - \sqrt{b_2^2 - 4a_2c_2}}{2a_2} \quad (5.13)$$

Da mesma forma que no caso anterior tanto raiz1, equação (5.12), como raiz2, equação (5.13), podem ser solução admissível desde que estejam inseridas no intervalo fechado $[0,1]$.

Considere agora a aresta 3. A substituição da equação (5.5) em (5.2) fornece a seguinte equação de segundo grau em v :

$$(2A_3 - 4A_4 + 2A_5)v^2 + (-3A_3 + 4A_4 - A_5)v + A_3 - A_p = 0 \quad (5.14)$$

ou simplificando

$$a_3 v^2 + b_3 v + c_3 = 0 \quad (5.15)$$

Resolvendo (5.15) obtém-se as seguintes raízes:

$$\text{raiz1} = \frac{-b_3 + \sqrt{b_3^2 - 4a_3c_3}}{2a_3} \quad (5.16)$$

$$\text{raiz2} = \frac{-b_3 - \sqrt{b_3^2 - 4a_3c_3}}{2a_3} \quad (5.17)$$

Da mesma forma que nos casos das duas arestas tratadas anteriormente, tanto raiz1, equação (5.16), como raiz2, equação (5.17), podem ser solução admissível de (5.15) desde que estejam inseridas no intervalo fechado $[0,1]$. Com o valor da variável v obtido de (5.16) e/ou (5.17) determina-se o respectivo valor da variável u através da equação (5.5).

Pelo que foi exposto nos últimos parágrafos pode-se constatar que a equipotencial A_p poderá cortar o elemento finito triangular de segunda ordem da figura 5.4b em até seis pontos, dois pontos por aresta, como mostrado na figura 5.5 abaixo.

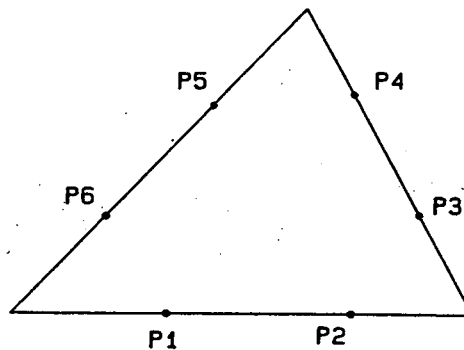
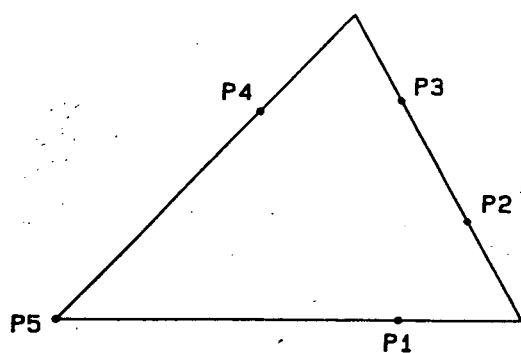
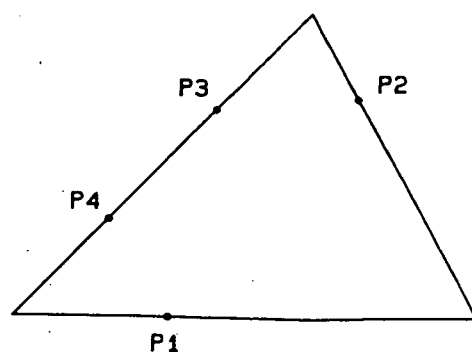


Figura 5.5

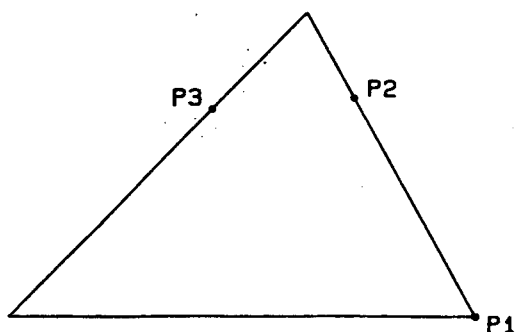
São também possíveis as situações em que a equipotencial A_p poderá cortar o elemento de segunda ordem em cinco pontos, figura 5.6a, em quatro pontos, figura 5.6b, em três pontos, figura 5.6c, em dois pontos, figura 5.6d, ou em um único ponto, figura 5.6e.



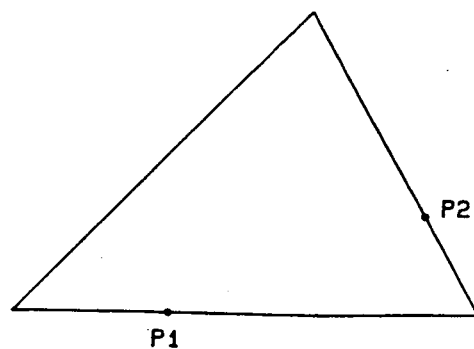
(a)



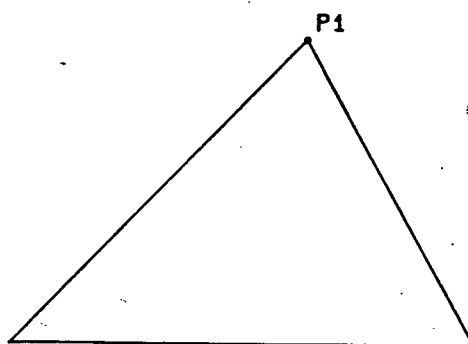
(b)



(c)



(d)



(e)

Figura 5.6

Tendo-se determinado os pontos de interseção da equipotencial A_p com as arestas que formam o elemento analisado é necessário se definir a forma como esta equipotencial passará pelo elemento. Expondo de outra forma, é necessário se definir quais os pontos de interseção que deverão ser interligados.

Considere, por exemplo, a situação representada pela figura 5.7.

Deseja-se definir como a equipotencial passa pelo triângulo número (2) passando pelos quatro pontos de interseção.

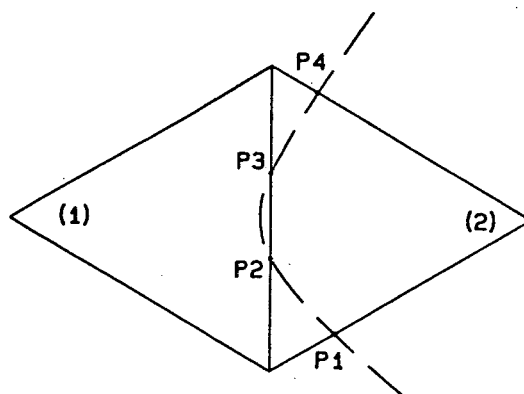


Figura 5.7

Analisando a figura 5.7 observa-se que o triângulo (1), adjacente ao triângulo (2), é cortado pela equipotencial A_p nos pontos P_2 e P_3 . Assim, como o triângulo (1) é cortado apenas nesses dois pontos, pode-se afirmar que P_2 e P_3 são interligados neste elemento.

É necessário agora definir como os pontos P_1 e P_4 são ligados aos pontos P_2 e P_3 . Para isso, considere as figuras 5.8a e 5.8b.

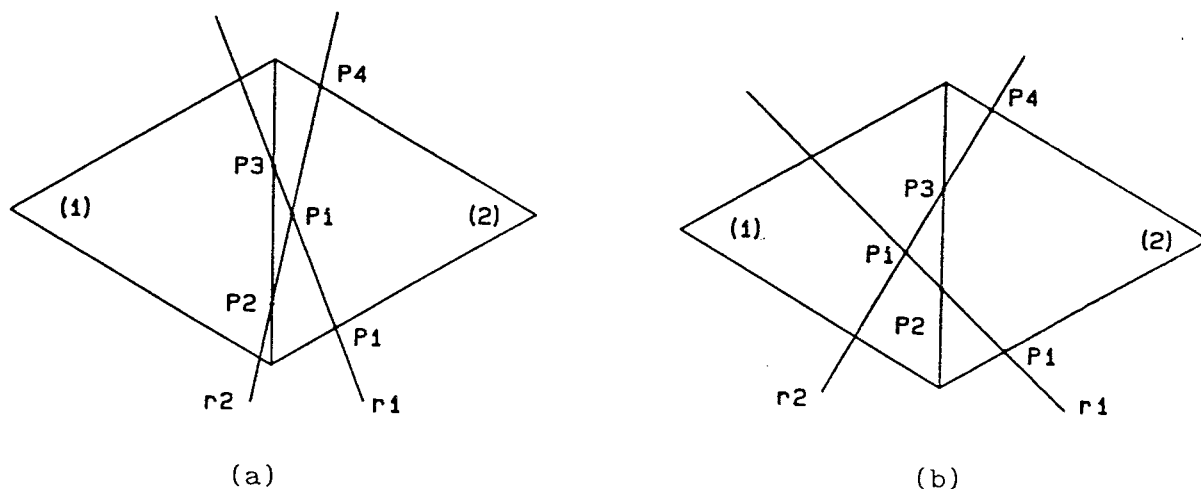


Figura 5.8

Considere as retas r_1 e r_2 mostradas na figura 5.8a que passam pelos pontos (P_1, P_3) e (P_2, P_4) respectivamente. Seja P_i o ponto de interseção entre essas duas retas.

O ponto P_1 não poderá ser ligado ao ponto P_3 e o ponto P_4 não poderá ser ligado ao ponto P_2 como mostrado na figura 5.8a pois o ponto de interseção P_i

está dentro do elemento triangular (2) analisado.

Na figura 5.8b é apresentada a situação em que as arestas r_1 e r_2 passam pelos pontos (P_1, P_2) e (P_3, P_4) respectivamente.

Como pode ser observado, o ponto de interseção P_1 entre as retas r_1 e r_2 está, neste caso, fora do triângulo (2) analisado.

Assim pode-se afirmar que para o elemento triangular (2) da figura 5.7 o ponto P_1 deve ser ligado ao ponto P_2 e o ponto P_4 deve ser ligado ao ponto P_3 .

A ligação entre, por exemplo, os pontos P_1 e P_2 pode ser realizada através de um único segmento de reta ou através de diversos segmentos de retas calculando-se para isso quantos pontos intermediários quantos forem desejados. Isso é possível pois, como já foi mencionado, o potencial, vetor ou escalar, varia quadraticamente dentro do elemento finito triangular de segunda ordem subparamétrico. Quanto mais pontos intermediários forem utilizados melhor ficará o traçado das equipotenciais. É esta característica que possibilita que o traçado feito utilizando-se este procedimento seja melhor que o produzido pelo procedimento descrito na seção (5.1.1).

Considere, por exemplo, a situação representada pela figura 5.9b. Deseja-se calcular pontos intermediários entre os pontos de interseção P_1 e P_2 . Na figura 5.9a é mostrado o triângulo de referência relativo ao elemento da figura 5.9b.

Suponha que, no sistema de coordenadas de referência (u, v) , os pontos de interseção P_1 e P_2 possuem as seguintes coordenadas

$$\begin{array}{ll} P_1 & \gg (0, v_1) \\ P_2 & \gg (u_2, 0) \end{array}$$

sendo

$$0 \leq v_1 \leq 1$$

$$0 \leq u_2 \leq 1$$

Como já exposto anteriormente o potencial, escalar ou vetor, varia quadraticamente dentro do elemento de segunda ordem da figura 5.9a de acordo com a seguinte equação:

$$\begin{aligned} & (2A_1 - 4A_2 + A_3)u^2 + (2A_1 + 2A_5 - 4A_6)v^2 + (-3A_1 + 4A_2 - A_3)u + \\ & (-3A_1 - A_5 + 4A_6)v + (4A_1 - 4A_2 + 4A_4 - 4A_6)uv + A_1 - A_p = 0 \end{aligned} \quad (5.18)$$

onde A_p é o valor da equipotencial que está sendo traçada e A_i , $i = 1, \dots, 6$, são os valores do potencial nos nós deste elemento.

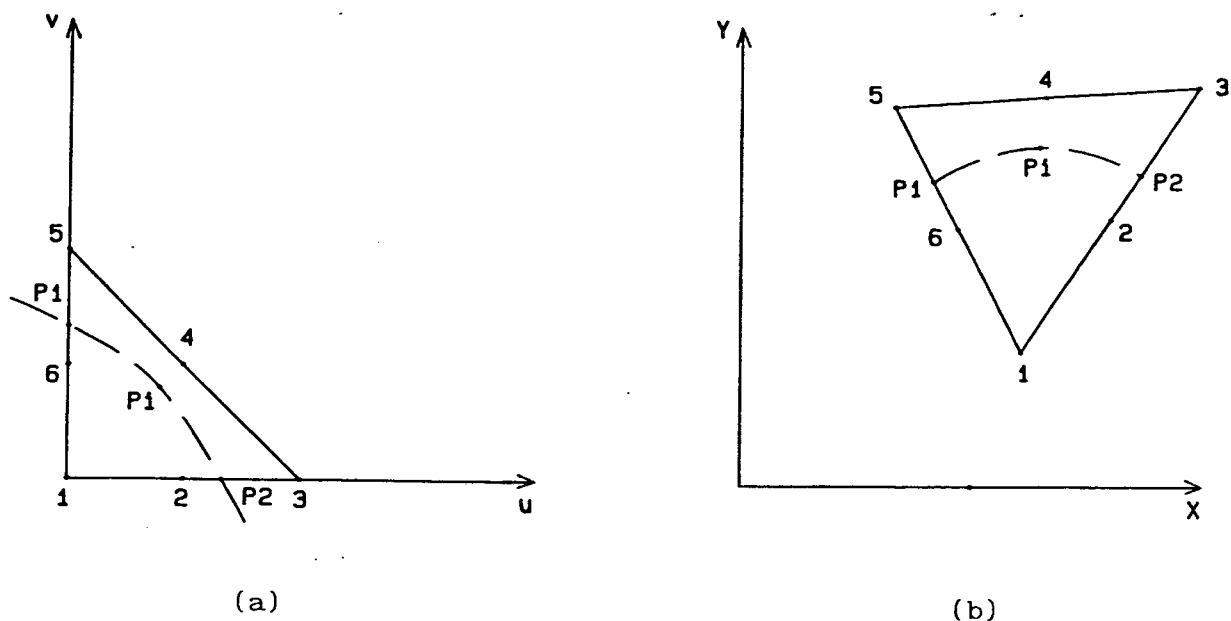


Figura 5.9

Assim, seja o ponto P_i de coordenadas (u_i, v_i) um ponto intermediário como mostrado na figura 5.9a. Fixando o valor de u_i pode-se obter o valor de v_i através da equação (5.18). Assim, substituindo a coordenada u_i em (5.18) obtém-se a seguinte equação de segundo grau em v :

$$(2A_1 + 2A_5 - 4A_6)v^2 + (-3A_1 - A_5 + 4A_6)v + (2A_1 - 4A_2 + A_3)u_i^2 + (-3A_1 + 4A_2 - A_3)u_i + A_1 - A_p = 0 \quad (5.19)$$

ou

$$a v^2 + b v + c = 0 \quad (5.20)$$

onde

$$a = 2A_1 + 2A_5 - 4A_6$$

$$b = -3A_1 - A_5 + 4A_6$$

$$c = (2A_1 - 4A_2 + A_3)u_i^2 + (-3A_1 + 4A_2 - A_3)u_i + A_1 - A_p$$

Resolvendo a equação (5.20) obtém-se as seguintes raízes

$$v_{11} = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad (5.21)$$

$$v_{12} = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad (5.22)$$

É necessário testar qual das raízes v_{11} ou v_{12} é a coordenada v_i do ponto intermediário P_i . Para isso basta determinar qual das raízes, v_{11} ou v_{12} , está contida no intervalo $[0,1]$. Se ambas as raízes pertencerem ao intervalo $[0,1]$ testa-se qual dos pontos (u_i, v_{11}) ou (u_i, v_{12}) pertence ao elemento triangular da figura 5.8a. Se, por exemplo, o ponto (u_i, v_{11}) estiver dentro do elemento em questão a coordenada v_i do ponto intermediário P_i deve se feita igual a v_{11} .

Esse procedimento deve ser repetido para obtenção das coordenadas de todos os pontos intermediários desejados.

Na situação representada pela figura 5.6c, três pontos de interseção, determina-se como a equipotencial passa pelo elemento finito triangular obtendo-se, inicialmente, qual dos pontos de interseção coincide com um dos vértices do elemento. Como pode ser observado na figura 5.6c os pontos P_3 e P_2 devem ser interligados desde que o ponto P_1 coincide com um dos vértices.

Na situação representada pela figura 5.6a, cinco pontos de interseção, é necessário, em primeiro lugar, definir qual dos pontos de interseção que coincide com um dos vértices do elemento triangular. Como pode ser observado na figura 5.6a o ponto P_5 coincide com um dos vértices. A forma como a equipotencial corta o elemento deve ser determinada analisando os quatro pontos intermediários, P_1 , P_2 , P_3 e P_4 , restantes, ou seja, a análise deve ser feita como se o elemento fosse cortado em apenas quatro pontos como no elemento (2) da figura 5.7.

Na situação representada pela figura 5.5, onde a equipotencial em questão corta o elemento finito triangular em seis pontos, deve-se determinar, em primeiro lugar, dois pontos que seguramente são interligados. A forma como os outros quatro pontos de interseção devem ser ligados é determinada como no caso representado pelo elemento triangular número (2) da figura 5.7.

Os dois pontos que devem ser primeiro definidos são obtidos partindo do pressuposto de que pontos de interseção que pertençam a uma mesma aresta não são interligados nesse elemento. Esses dois pontos foram obtidos

determinando-se quais os dois pontos de interseção pertencentes a arestas distintas que estão mais próximos.

Os pontos P_1 e P_2 da figura 5.6d devem ser ligados desde que são os únicos pontos de interseção.

É interessante salientar que podem ser calculados quantos pontos intermediários entre pontos de interseção interligados quantos forem desejados nas situações representadas pelas figuras 5.6c, três pontos de interseção, 5.6a, cinco pontos, 5.5, seis pontos e 5.6d, dois pontos de interseção.

5.1.3 - Aspectos da Implementação

O traçado via aproximação de primeira ordem apresentado na seção (5.1.1) mostrou ser uma forma simples e eficaz de apresentação gráfica dos resultados numéricos de problemas bidimensionais. Não houve grandes dificuldades na sua implementação.

A possibilidade de uma maior partição do elemento triangular de segunda ordem sugerida por Meek [13], cf. figura 5.3, é uma forma simples e eficiente de melhorar a qualidade do traçado de linhas equipotenciais por esse procedimento.

Através do traçado via aproximação de segunda ordem apresentado na seção (5.1.2) podem-se obter traçados de melhor qualidade do que o obtido via aproximação linear. Porém, essa melhor qualidade é obtida às custas de uma maior dificuldade de implementação do método e de um tempo de processamento mais longo.

As diversas formas como uma equipotencial pode cortar um elemento finito triangular subparamétrico de segunda ordem, apresentadas na seção (5.1.2), dificultam bastante a implementação deste método.

A definição de como uma equipotencial passa pelo elemento, tendo-se obtido os pontos de interseção, exigiu, como exposto, um algoritmo bastante complexo e trabalhoso.

A determinação de pontos intermediários entre pontos de interseção interligados é, por outro lado, bastante simples. Observe as equações (5.19), (5.20), (5.21) e (5.22).

Nos trabalhos de Gray [8] e Stelzer [25] são discutidas outras formas de apresentação gráfica para elementos finitos de ordem elevada.

5.2 - Análise Numérica dos Resultados

Tendo-se constatado por visualização do traçado das linhas equipotenciais que o cálculo do potencial, escalar ou vetor, nos nós da malha de elementos finitos foi efetuado, a princípio, corretamente, passa-se a fase da análise quantitativa do fenômeno físico simulado.

Nesta fase, as informações significativas do fenômeno simulado serão extraídas dos resultados. As grandezas físicas que podem ser obtidas em qualquer ponto ou região da estrutura estudada são:

- . o valor do potencial
- . os valores do campo elétrico, \vec{E} , ou magnético, \vec{H} ;
- . os valores da indução elétrica, \vec{D} , ou magnética, \vec{B} ;
- . o valor da densidade de corrente \vec{J} ;
- . o valor pontual da permeabilidade magnética de um meio não-linear;
- . o valor do fluxo, magnético ou elétrico, entre dois pontos;
- . o valor de indutância própria e mútua;
- . o valor da força exercida em um corpo de volume V.

Nas seções seguintes será apresentada a forma como estas informações são extraídas da estrutura simulada pelo método de elementos finitos.

5.2.1 - Obtenção de \vec{E} , \vec{H} , \vec{D} , \vec{B} e \vec{J}

Considere as equações (2.19), (2.35), (2.40) e (2.56) reescritas abaixo:

$$\vec{E} = - \text{Grad } V \quad (5.23)$$

$$\vec{H} = - \text{Grad } V \quad (5.24)$$

$$\vec{B} = \text{Rot } \vec{A} \quad (5.25)$$

$$\vec{J} = \text{Rot } \vec{T} \quad (5.26)$$

onde V na equação (5.23) representa o potencial escalar elétrico e na equação (5.24) representa o potencial escalar magnético. O vetor \vec{A} é o potencial vetor magnético e o vetor \vec{T} é o potencial vetor elétrico.

Como exposto no capítulo 4, o potencial, escalar ou vetor, dentro de um elemento finito triangular de segunda ordem subparamétrico é, de acordo com as equações (4.11) ou (4.12), representado por:

$$A = A_i N_i \quad , \quad i = 1, \dots, 6 \quad (5.27)$$

ou desenvolvendo

$$\begin{aligned}\tilde{A} = & (2A_1 - 4A_2 + 2A_3)u^2 + (2A_1 + 2A_5 - 4A_6)v^2 + (-3A_1 + 4A_2 - A_3)u + \\ & (-3A_1 - A_5 + 4A_6)v + (4A_1 - 4A_2 + 4A_4 - 4A_6)uv + A_1\end{aligned}\quad (5.28)$$

onde as constantes A_i , $i=1,\dots,6$, são os valores do potencial, escalar ou vetor, nos nós do elemento de segunda ordem e N_i , $i=1,\dots,6$, são as funções de interpolação ou funções teste.

Desenvolvendo, por exemplo, a equação (5.25) obtém-se, veja equação (2.44):

$$\vec{B} = \frac{\partial \tilde{A}}{\partial y} \vec{i} - \frac{\partial \tilde{A}}{\partial x} \vec{j} \quad (5.29)$$

ou ainda

$$B_x = \frac{\partial \tilde{A}}{\partial y} \quad (5.30)$$

$$B_y = - \frac{\partial \tilde{A}}{\partial x} \quad (5.31)$$

Substituindo a equação (5.27) em (5.30) e (5.31) obtém-se

$$B_x = \frac{\partial (A_i N_i)}{\partial y} = A_i \frac{\partial N_i}{\partial y} = A_i \left[\frac{\partial N_i}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial N_i}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y} \right] \quad (5.32)$$

$$B_y = - \frac{\partial (A_i N_i)}{\partial x} = - A_i \frac{\partial N_i}{\partial x} = - A_i \left[\frac{\partial N_i}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial N_i}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} \right] \quad (5.33)$$

onde $i = 1,\dots,6$ para o elemento finito triangular de segunda ordem subparamétrico.

É importante salientar que a indução magnética varia linearmente dentro do elemento finito de segunda ordem como pode ser observado nas equações (5.32) e (5.33).

Assim, para um determinado ponto de coordenadas (u_j, v_j) determina-se, por exemplo, o valor da indução magnética no ponto através das equações (5.32) e (5.33). Os valores das derivadas das funções de interpolação no ponto podem ser obtidas das equações (4.1), ..., (4.6). As derivadas $\partial u / \partial x$, $\partial u / \partial y$, $\partial v / \partial x$ e $\partial v / \partial y$ são, como exposto no capítulo 4, os termos da inversa da matriz jacobiana. A matriz jacobiana é obtida utilizando-se as equações (4.7) e (4.8). Observe o procedimento envolvido na obtenção das equações (4.19) e

(4.20).

Desenvolvendo as equações (5.23), (5.24) e (5.26) obtém-se os seguintes resultados:

$$E_x = - \frac{\partial V}{\partial x} = - V_1 \left[\frac{\partial N_1}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial N_1}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} \right] \quad (5.34)$$

$$E_y = - \frac{\partial V}{\partial y} = - V_1 \left[\frac{\partial N_1}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial N_1}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y} \right] \quad (5.35)$$

$$H_x = - \frac{\partial V}{\partial x} = - V_1 \left[\frac{\partial N_1}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial N_1}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} \right] \quad (5.36)$$

$$H_y = - \frac{\partial V}{\partial y} = - V_1 \left[\frac{\partial N_1}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial N_1}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y} \right] \quad (5.37)$$

$$J_x = \frac{\partial T}{\partial y} = T_1 \left[\frac{\partial N_1}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial N_1}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y} \right] \quad (5.38)$$

$$J_y = - \frac{\partial T}{\partial x} = - T_1 \left[\frac{\partial N_1}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial N_1}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} \right] \quad (5.39)$$

É muito importante no momento da implementação que seja observado a analogia existente entre as equações (5.32), (5.33) e (5.38), (5.39) e entre as equações (5.34), (5.35) e (5.36), (5.37).

A análise pontual da permeabilidade no meio magnético é muito importante no caso de problemas magnéticos não-lineares. Pode-se, assim, determinar o nível de saturação do meio em uma região específica da estrutura estudada. Esta característica do meio é obtida da curva de saturação $B(H)$ que é um dado fornecido ao programa via arquivo de dados.

É importante observar que para se obter, por exemplo, o valor do potencial, do campo, da indução e da característica do meio em um ponto P qualquer de coordenadas globais (x_j, y_j) é necessário se descobrir a qual elemento finito este ponto P pertence e, depois, quais são os valores das coordenadas locais (u_j, v_j) correspondente.

Considere a figura 5.10 abaixo onde os pontos P_1 , P_2 , P_3 , P_4 , P_5 , P_6 e P_7 possuem as coordenadas globais (x_1, y_1) , (x_2, y_2) , (x_3, y_3) , (x_4, y_4) , (x_5, y_5) , (x_6, y_6) e (x_7, y_7) respectivamente. Deseja-se determinar se o ponto P_7 pertence ao triângulo $P_1P_3P_5$.

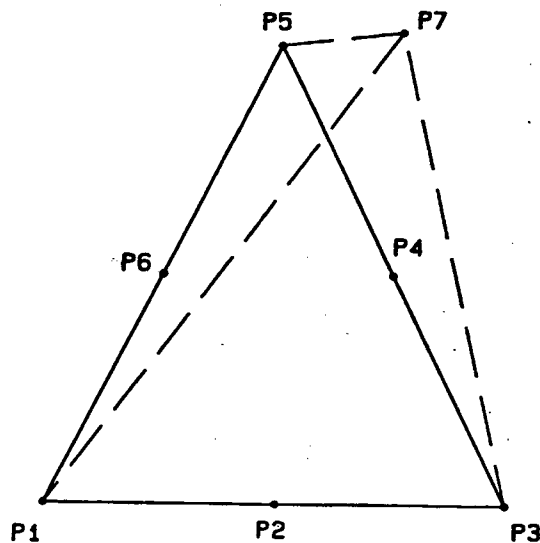


Figura 5.10

Para isso considere os triângulos $P_1P_3P_7$, $P_3P_5P_7$ e $P_5P_1P_7$ cujas áreas são obtidas como abaixo:

$$\text{Área } P_1P_3P_7 = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_3 & x_7 \\ y_1 & y_3 & y_7 \end{vmatrix} \quad (5.40)$$

$$\text{Área } P_3P_5P_7 = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_3 & x_5 & x_7 \\ y_3 & y_5 & y_7 \end{vmatrix} \quad (5.41)$$

$$\text{Área } P_5P_1P_7 = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_5 & x_1 & x_7 \\ y_5 & y_1 & y_7 \end{vmatrix} \quad (5.42)$$

Se a soma dos valores absolutos das três áreas representadas pelas equações (5.40), (5.41) e (5.42) for igual ao absoluto da soma dessas mesmas três áreas o ponto P_7 pertencerá ao triângulo $P_1P_3P_5$. Caso contrário ele será um ponto externo.

As coordenadas locais (u_j, v_j) correspondente ao ponto P de coordenadas globais (x_j, y_j) são obtidas utilizando-se as equações (4.7) e (4.8).

5.2.2 - Obtenção do Valor do Fluxo

O valor do fluxo magnético ϕ entre dois pontos P_1 e P_2 quaisquer é obtido, como será mostrado a seguir, diretamente do valor do potencial vetor magnético nos pontos P_1 e P_2 .

O fluxo magnético é calculado em problemas bidimensionais por unidade de profundidade. Observe a figura 5.11 abaixo. O fluxo magnético por unidade de profundidade é obtido neste caso pela seguinte equação: $\phi = B l$ (weber/m). O fluxo real é calculado multiplicando-se esse valor pela profundidade da estrutura estudada.

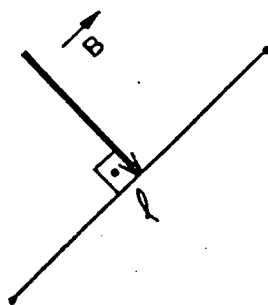


Figura 5.11

Observe a estrutura mostrada na figura 5.12 onde tem-se o plano de estudo (Oxy) e a superfície perpendicular S real do dispositivo estudado através do qual se deseja calcular o fluxo magnético.

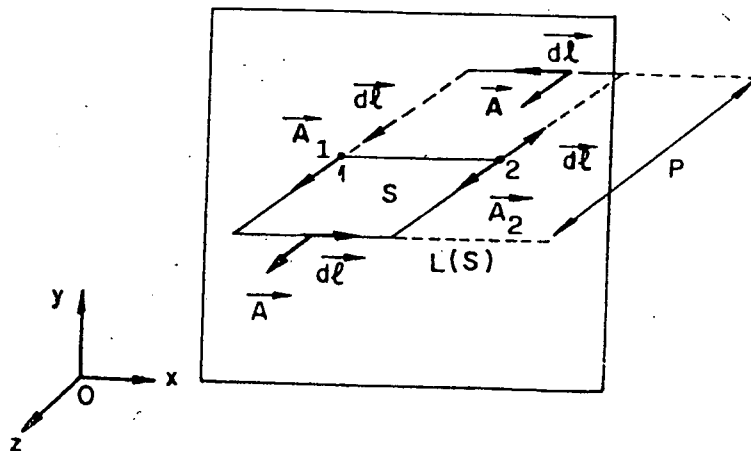


Figura 5.12

No ponto 1 tem-se $\vec{A} = \vec{A}_1$ e no ponto 2 tem-se $\vec{A} = \vec{A}_2$. Ambos os vetores possuem componentes somente na direção Oz.

Tem-se que

$$\phi = \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{s} = \iint_S \text{Rot } \vec{A} \cdot d\vec{s} \quad (5.43)$$

Aplicando o teorema de Stokes à equação (5.43) obtém-se que:

$$\phi = \oint_{L(S)} \vec{A} \cdot d\vec{l} \quad (5.44)$$

Calculando a circulação do vetor \vec{A} ao longo do caminho fechado $L(S)$ obtém-se que

$$\phi = A_1 P - A_2 P \quad (5.45)$$

pois a circulação do vetor \vec{A} é nula nos segmentos onde o potencial vetor é perpendicular ao vetor $d\vec{l}$.

Como pode ser observado na figura 5.12, o valor P representa a profundidade da peça.

Rearranjando a equação (5.45) chega-se ao seguinte resultado:

$$\frac{\phi}{P} = A_1 - A_2 \quad (5.46)$$

ou seja, o fluxo magnético por unidade de profundidade entre dois pontos P_1 e P_2 é dado pela diferença dos valores do potencial vetor calculado nos pontos.

É importante notar que duas linhas equipotenciais vetor formam um tubo de fluxo magnético.

O cálculo do fluxo magnético em potencial escalar magnético, situação física apresentada na seção (2.2.3), não é tão direto. Neste caso, o fluxo entre dois pontos pode ser obtido como mostrado na figura 5.13.

Deve-se dividir a linha AB em n pequenos segmentos. Em cada segmento deve-se obter o campo \vec{H} no ponto médio. Decompoem-se o vetor campo magnético \vec{H} nas componentes normal, H_n , e tangencial, H_t . A parcela de fluxo relativa a cada segmento é dada por:

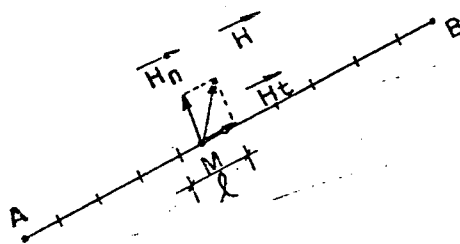


Figura 5.13

$$d\phi = \mu H_n l \quad (5.47)$$

O fluxo magnético total por unidade de profundidade que atravessa a linha AB é obtido somando-se as parcelas $d\phi$, equação (5.47), de todos os n segmentos.

Para o elemento finito de segunda ordem, quanto maior o número de segmentos melhor será o resultado obtido. Isto ocorre porque, como já foi mencionado, o campo magnético varia linearmente dentro desse elemento.

Pode-se obter, para a situação física apresentada na seção (2.2.2) e (2.2.6), a corrente elétrica por unidade de profundidade enquanto que um fluxo elétrico pode ser obtido para a situação física apresentada na seção (2.2.1).

5.2.3 - Obtenção da Indutância Própria e Mútua

A indutância própria de uma bobina, supondo condição de linearidade, pode ser obtida através da energia magnética do sistema. Somente deve haver corrente na bobina na qual se deseja calcular a indutância própria.

Sabe-se que

$$L = \frac{2W}{I^2} \quad (5.48)$$

onde L é a indutância própria da bobina, I é a corrente total que passa na bobina e W é a energia magnética do sistema que pode ser obtida através da seguinte equação:

$$W = \sum_{i=1}^n \iint_{S_i} \frac{\mu H_i^2}{2} ds \quad (5.49)$$

onde n é o número total de elementos da malha de elementos finitos e H_i é o

campo magnético no elemento finito i de área S_i .

Multiplicando e dividindo a equação (5.49) pela permeabilidade μ obtém-se

$$W = \sum_{i=1}^n \iint_{S_i} \frac{B_i^2}{2\mu} ds = \sum_{i=1}^n \iint_{S_i} \frac{B_{xi}^2 + B_{yi}^2}{2\mu} ds \quad (5.50)$$

Substituindo as equações (5.32) e (5.33) em (5.50) e integrando numericamente, para cada elemento, utilizando um dos dois métodos de integração apresentados no capítulo 4 obtém-se o valor da energia magnética do sistema e consequentemente, a indutância própria da bobina.

A indutância mútua entre uma bobina 1 e uma bobina 2, M_{12} , pode ser obtida, em alguns casos, calculando-se o potencial vetor médio na bobina 2, ou seja:

$$A = \frac{1}{k} \sum_k A_k \quad (5.51)$$

onde A_k pode ser, por exemplo, o potencial no baricentro de cada um dos elementos finitos triangulares de segunda ordem que discretizam a região onde está a bobina 2. Como é sabido, somente deve haver corrente na bobina 1. A indutância mútua M_{12} é, assim, dada por:

$$M_{12} = \frac{n_2 A}{I_1} \quad (5.52)$$

onde n_2 é o número de espiras da bobina 2 e I_1 é a corrente total que passa na bobina 1.

5.2.4 - O Tensor de Maxwell

Nesta seção será apresentada sucintamente a técnica implementada para o cálculo dos esforços sobre um corpo submetido à ação de campo magnético.

O cálculo de força através do Tensor de Maxwell é um dos procedimentos mais eficazes na determinação de esforços em estruturas como, por exemplo, o rotor de uma máquina elétrica.

Para a aplicação prática do Tensor de Maxwell suponha um corpo de volume V no espaço, figura 5.14. É necessário que se conheça o campo magnético \vec{H} na superfície $S(V)$. A superfície $S(V)$ deve estar situada num meio de permeabilidade igual a μ_0 , permeabilidade do ar.

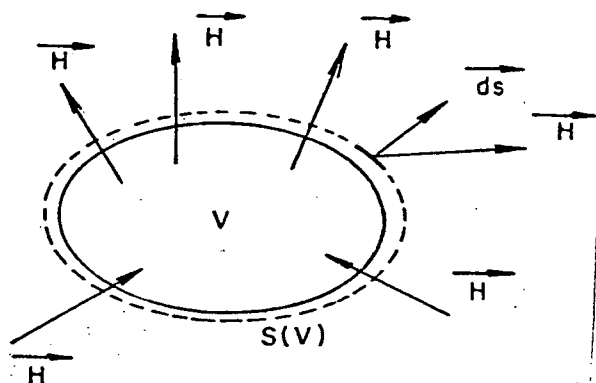


Figura 5.14

O vetor $d\vec{s}$ aponta sempre para a região externa a superfície $S(V)$. Chamando \vec{n} o vetor unitário normal à superfície tem-se que $d\vec{s} = ds \vec{n}$ onde ds representa uma parcela elementar da área da superfície $S(V)$. O Tensor de Maxwell é dado pela expressão (Bastos [2]):

$$d\vec{F} = -\frac{\mu_0}{2} |\vec{H}|^2 d\vec{s} + \mu_0 (\vec{H} \cdot d\vec{s}) \vec{H} \quad (5.53)$$

ou

$$\frac{d\vec{F}}{d\vec{s}} = -\frac{\mu_0}{2} |\vec{H}|^2 \vec{n} + \mu_0 (\vec{H} \cdot \vec{n}) \vec{H} \quad (5.54)$$

A equação (5.54) fornece o valor de $d\vec{F}$ relativo a uma parcela da superfície $S(V)$ onde se conhece o campo magnético \vec{H} .

A integração da expressão (5.54) em toda a superfície $S(V)$ fornecerá a força total aplicada ao corpo submetido à ação do campo magnético.

Considere agora um caso bidimensional relativo a um sistema de coordenadas local Oxy tal que o eixo ox seja paralelo à superfície ds de um corpo, figura 5.15.

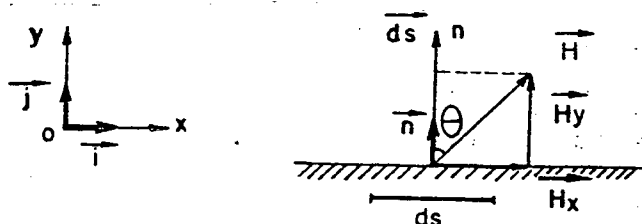


Figura 5.15

Considere que o campo \vec{H} seja constante em toda a superfície ds . Utilizando os vetores unitários ortogonais \vec{i} e \vec{j} associados aos eixos Ox e Oy pode-se escrever:

$$\vec{n} = \vec{j} \quad (5.55)$$

e

$$\vec{H} = H_x \vec{i} + H_y \vec{j} \quad (5.56)$$

Substituindo (5.55) e (5.56) em (5.54) obtém-se

$$\frac{d\vec{F}}{ds} = -\frac{\mu_0}{2} (H_x^2 + H_y^2) \vec{j} + \mu_0 \left[(H_x \vec{i} + H_y \vec{j}) \cdot \vec{j} \right] (H_x \vec{i} + H_y \vec{j}) \quad (5.57)$$

que, após algumas operações algébricas, chega-se a seguinte equação:

$$\frac{d\vec{F}}{ds} = \mu_0 H_x H_y \vec{i} + \frac{\mu_0}{2} (H_y^2 - H_x^2) \vec{j} \quad (5.58)$$

ou ainda

$$dF_x = \mu_0 H_x H_y ds \quad (5.59)$$

$$dF_y = \frac{\mu_0}{2} (H_y^2 - H_x^2) ds \quad (5.60)$$

Considere a situação genérica apresentada na figura 5.16 em que o elemento de área ds está numa posição qualquer no espaço em relação ao sistema de coordenadas global representado por (X,Y) .

O vetor \vec{n} é o vetor unitário normal à superfície ds . O sistema de coordenadas local (x,y) é definido tal que o eixo y fique paralelo ao vetor \vec{n} e, consequentemente, o eixo x fique paralelo à superfície ds . O ângulo θ é o ângulo entre o vetor campo magnético e o eixo x do sistema local. O ângulo α é o ângulo entre o vetor unitário normal \vec{n} e o eixo X do sistema global.

Os valores das componentes da força no sistema de coordenadas local (x,y) , f_x e f_y , devem ser obtidos através das equações (5.59) e (5.60).

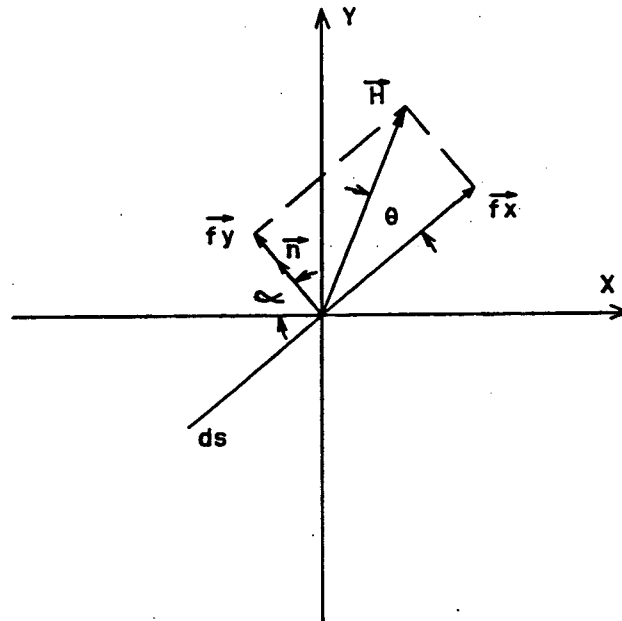


Figura 5.16

As componentes da força devido ao elemento de área ds no sistema de coordenadas global (X, Y) são obtidas através das seguintes equações:

$$F_x = f_x \sin \alpha - f_y \cos \alpha \quad (5.61)$$

$$F_y = f_x \cos \alpha + f_y \sin \alpha \quad (5.62)$$

Assim, deve-se dividir a superfície $S(V)$ que contorna o corpo V em pequenos segmentos ds . Para cada segmento calcula-se, no ponto médio do segmento, as componentes da força F_x e F_y no sistema de coordenadas global, equações (5.61) e (5.62). O somatório das componentes da força devido a todos os segmentos fornecerá a força resultante que é aplicada ao corpo V .

Quanto menor for o segmento ds mais próximo do valor real será calculada a força resultante pois no elemento finito de segunda ordem subparamétrico o campo magnético \vec{H} varia linearmente dentro do elemento, ao contrário do elemento de primeira ordem onde o campo é constante dentro do elemento.

5.3 - Conclusão - Capítulo 5

Neste capítulo foi apresentada a etapa de pós-processamento do programa de cálculo de campo pelo método de elementos finitos utilizando um elemento finito triangular de segunda ordem subparamétrico.

As duas formas de apresentação gráfica dos resultados discutidas nas seções (5.1.1) e (5.1.2) proporcionaram bons resultados. A complexidade de implementação do procedimento de traçado via aproximação quadrática e o aumento do tempo de cálculo tornam, entretanto, esta proposta não muito atraente. A proposta apresentada na seção (5.1.1), aproximação linear, é uma maneira simples e muito eficiente de traçado de linhas equipotenciais. Salientou-se também que a possibilidade de maior partição do elemento de segunda ordem em elementos de primeira ordem (figura 5.3) possibilita a obtenção de traçados de melhor qualidade.

Não houve grandes problemas na implementação das rotinas para apresentação numérica dos resultados. No capítulo 6 serão apresentados alguns resultados numéricos comparativos entre o elemento finito triangular de segunda ordem subparamétrico e o elemento de primeira ordem.

CAPÍTULO 6

Apresentação e Análise dos Resultados

Neste capítulo serão apresentados resultados de casos simulados de cálculo de campo elétrico e magnético utilizando o elemento finito triangular de segunda ordem subparamétrico.

Será feita uma análise comparativa desses resultados com os obtidos utilizando-se o elemento finito triangular de primeira ordem.

6.1 - Potencial Escalar Elétrico

Considere o capacitor cilíndrico de raio interno r_1 e raio externo r_2 mostrado na figura 6.1. O cilindro interno está num potencial V_1 e o cilindro externo num potencial V_2 .

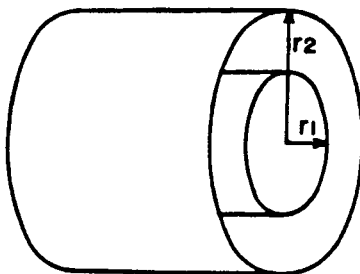


Figura 6.1 - Capacitor Cilíndrico

Pode-se observar que esta estrutura possui uma simetria axial. Assim, como discutido na seção (3.3), o capacitor cilíndrico da figura 6.1 pode ser modelado como mostrado na figura 6.2.

Devido à simplicidade da geometria do modelo, pode-se determinar a solução analítica da variação do potencial escalar elétrico em função das coordenadas cilíndricas r e z . Assim, seja a equação (3.103) desenvolvida na seção (3.3.1) considerando que a densidade de carga elétrica ρ é neste caso igual a zero:

$$\text{Div } \epsilon (-\text{Grad } V) = 0 \quad (6.1)$$

onde ϵ é a permissividade do meio e V é o potencial escalar elétrico.

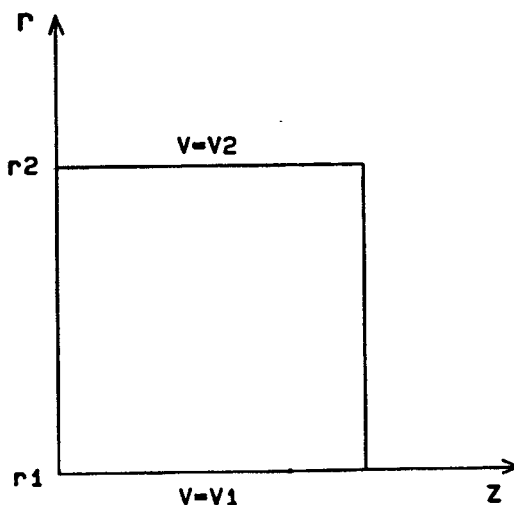


Figura 6.2

Desenvolvendo (6.1) obtém-se:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[r \left(-\epsilon \frac{\partial V}{\partial r} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left(-\epsilon \frac{\partial V}{\partial z} \right) = 0 \quad (6.2)$$

Como não existe variação do potencial na direção z, a equação (6.2) pode ser, então, simplificada para:

$$\frac{\partial}{\partial r} \left[r \left(-\epsilon \frac{\partial V}{\partial r} \right) \right] = 0 \quad (6.3)$$

Integrando a equação (6.3) duas vezes obtém-se:

$$V = -\frac{K1}{\epsilon} (\ln r + K2) \quad (6.4)$$

As constantes K1 e K2 são obtidas substituindo as duas condições de contorno conhecidas, $V(r1) = V1$ e $V(r2) = V2$, na equação (6.4). Assim, chega-se a seguinte equação:

$$V = \frac{1}{\ln r1 - \ln r2} \left[(V1 - V2) \ln r + V2 \ln r1 - V1 \ln r2 \right] \quad (6.5)$$

Fazendo $r1 = 0,2$ mm, $r2 = 1,0$ mm, $V1 = 0$ v e $V2 = 100$ v obtém-se:

$$V = 62,1335 \ln r + 100 \quad (6.6)$$

A equação (6.6) fornece o valor exato do potencial escalar elétrico em

qualquer ponto do modelo da figura 6.2.

Nas tabelas 6.1 e 6.2 é apresentado o valor absoluto do erro de cálculo do potencial escalar elétrico para alguns valores de r obtidos pelo método de elementos finitos utilizando elementos triangulares de primeira e segunda ordem, respectivamente, em relação ao valor exato do potencial fornecido pela equação (6.6). São também apresentados o tempo gasto na formação do sistema global de equações, tempo (1), e o tempo gasto na resolução desse sistema, tempo (2), para cada uma das diferentes malhas utilizadas.

Tabela 6.1 - Erro do Potencial . Primeira Ordem

Elementos		308	640	1440
Nós		180	357	775
Tempo (s)	(1)	2,25	4,61	10,27
	(2)	2,42	8,07	32,74
	(1)+(2)	4,67	12,68	43,01
Erro (%)	$r=,25\text{mm}$	9,87	0,25	0,12
	0,30	2,04	0,21	0,09
	0,35	0,52	0,15	0,26
	0,40	0,74	0,13	0,06
	0,45	0,61	0,09	0,13
	0,50	0,29	0,07	0,04
	0,55	0,28	0,07	0,07
	0,60	0,28	0,06	0,03
	0,65	0,17	0,05	0,05
	0,70	0,13	0,04	0,01
	0,75	0,14	0,03	0,03
	0,80	0,10	0,02	0,01
	0,85	0,05	0,01	0,02
	0,90	0,07	0,00	0,00
	0,95	0,04	0,00	0,01

Tabela 6.2 - Erro do Potencial . Segunda Ordem

Elementos		60	160	308
Nós		143	357	667
Tempo (s)	(1)	26,09	69,37	133,52
	(2)	4,12	22,85	74,76
	(1)+(2)	30,21	92,22	208,28
Erro (%)	r=,25mm	1,55	0,11	0,11
	0,30	0,27	0,01	0,05
	0,35	0,17	0,00	0,00
	0,40	0,18	0,02	0,01
	0,45	0,01	0,01	0,01
	0,50	0,05	0,00	0,00
	0,55	0,05	0,01	0,01
	0,60	0,02	0,00	0,00
	0,65	0,01	0,00	0,00
	0,70	0,02	0,00	0,00
	0,75	0,01	0,01	0,01
	0,80	0,01	0,01	0,01
	0,85	0,00	0,00	0,00
	0,90	0,00	0,00	0,00
	0,95	0,01	0,00	0,00

A variação do campo elétrico é obtida derivando a equação (6.6). Assim, tem-se que:

$$E = - \frac{62,1335}{r} \quad (6.7)$$

A equação (6.7) fornece o valor exato do campo elétrico em qualquer ponto do modelo da figura 6.2.

Nas tabelas 6.3 e 6.4 é apresentado o valor absoluto do erro de cálculo do campo elétrico obtido pelo método de elementos finitos de primeira e segunda ordem, respectivamente, em relação ao valor exato fornecido pela equação (6.7).

Tabela 6.3 - Erro do Campo . Primeira Ordem

Elementos		308	640	1440
Nós		180	357	775
Erro (%)	r=,25mm	6,102	8,946	0,067
	0,30	2,613	7,538	5,933
	0,35	8,012	6,548	0,043
	0,40	5,124	5,751	4,420
	0,45	0,705	5,123	0,091
	0,50	4,882	4,641	3,487
	0,55	4,630	4,630	0,027
	0,60	0,332	3,849	2,939
	0,65	3,065	3,557	0,073
	0,70	4,392	3,303	2,510
	0,75	0,935	3,084	0,066
	0,80	1,902	2,880	2,193
	0,85	4,230	2,706	0,071
	0,90	1,351	0,236	1,960
	0,95	1,092	0,223	0,070

Tabela 6.4 - Erro do Campo . Segunda Ordem

Elementos		60	160	308
Nós		143	357	667
Erro (%)	r=,25mm	1,636	1,354	0,469
	0,30	2,264	1,309	0,380
	0,35	3,675	0,719	0,408
	0,40	0,364	0,794	0,107
	0,45	1,105	0,453	0,236
	0,50	0,778	0,537	0,134
	0,55	0,062	0,292	0,062
	0,60	0,622	0,344	0,054
	0,65	0,084	0,199	0,010
	0,70	0,216	0,295	0,070
	0,75	0,380	0,151	0,078
	0,80	0,120	0,228	0,017
	0,85	0,290	0,126	0,079
	0,90	0,236	0,198	0,048
	0,95	0,177	0,101	0,024

Pode-se observar que as malhas utilizadas na simulação com os elementos de primeira e segunda ordem possuem, duas a duas, um número aproximadamente igual de nós.

Apesar do erro no cálculo de potencial ser pequeno de uma maneira geral, pode-se notar que os valores obtidos com o elemento de segunda ordem são melhores.

A diferença na exatidão de cálculo entre os métodos torna-se bem mais nítida nas tabelas 6.3 e 6.4. Pode-se observar que os resultados obtidos com o elemento de segunda ordem são bem melhores. A alternância de pequenos erros e grandes erros observada na última coluna da tabela 6.3 acontece porque o ponto calculado pode estar na fronteira entre dois elementos ou coincidir com um nó, pequenos erros, ou estar no interior de um elemento, erros grandes. Por

exemplo, quando um ponto coincide com um nó o valor do campo neste ponto é feito igual a média dos valores do campo de todos os elementos que possuem este nó em comum. Isto torna o valor no ponto mais exato.

É importante notar nas tabelas 6.1 e 6.2 que o tempo computacional gasto, tempo de formação mais tempo de resolução do sistema matricial, é bem maior quando é utilizado o elemento de segunda ordem. Como já mencionado, isso ocorre devido às integrações numéricas necessárias na formação do sistema matricial. É importante colocar que foi utilizado nestas simulações um computador compatível com o IBM-PC-AT.

É interessante ainda observar nestes resultados que nas malhas com elementos de primeira ordem o número de elementos é maior que o número de nós enquanto que nas malhas com elementos de segunda ordem a situação é inversa, o número de nós é maior que o número de elementos. Isto ocorre devido à natureza do elemento de segunda ordem, ou seja, possui mais nós por elemento.

6.2 - Potencial Escalar Magnético

Considere a estrutura de simetria longitudinal apresentada na figura 6.3. Os dentes são feitos de um determinado tipo de aço e o material da região externa ao metal é ar. Existe uma diferença de potencial entre as linhas A e B.

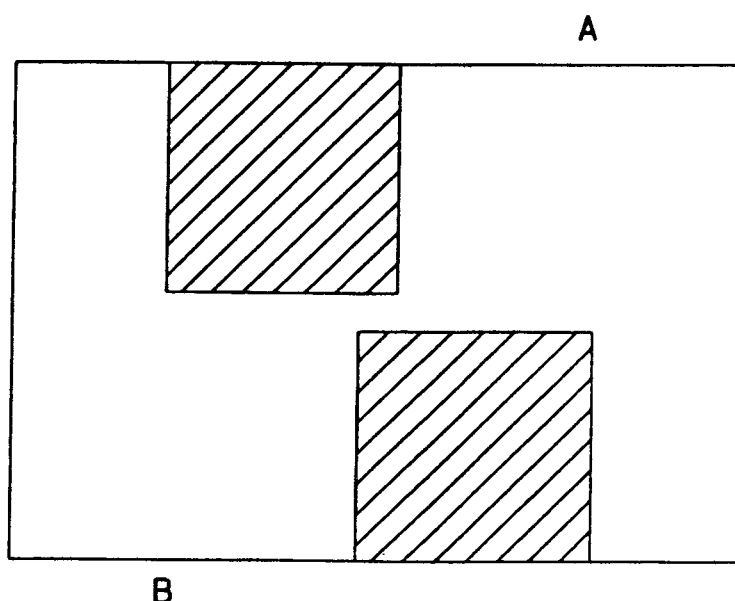


Figura 6.3

Na figura 6.4 é apresentada a curva $B(H)$ do aço utilizado nos dentes.

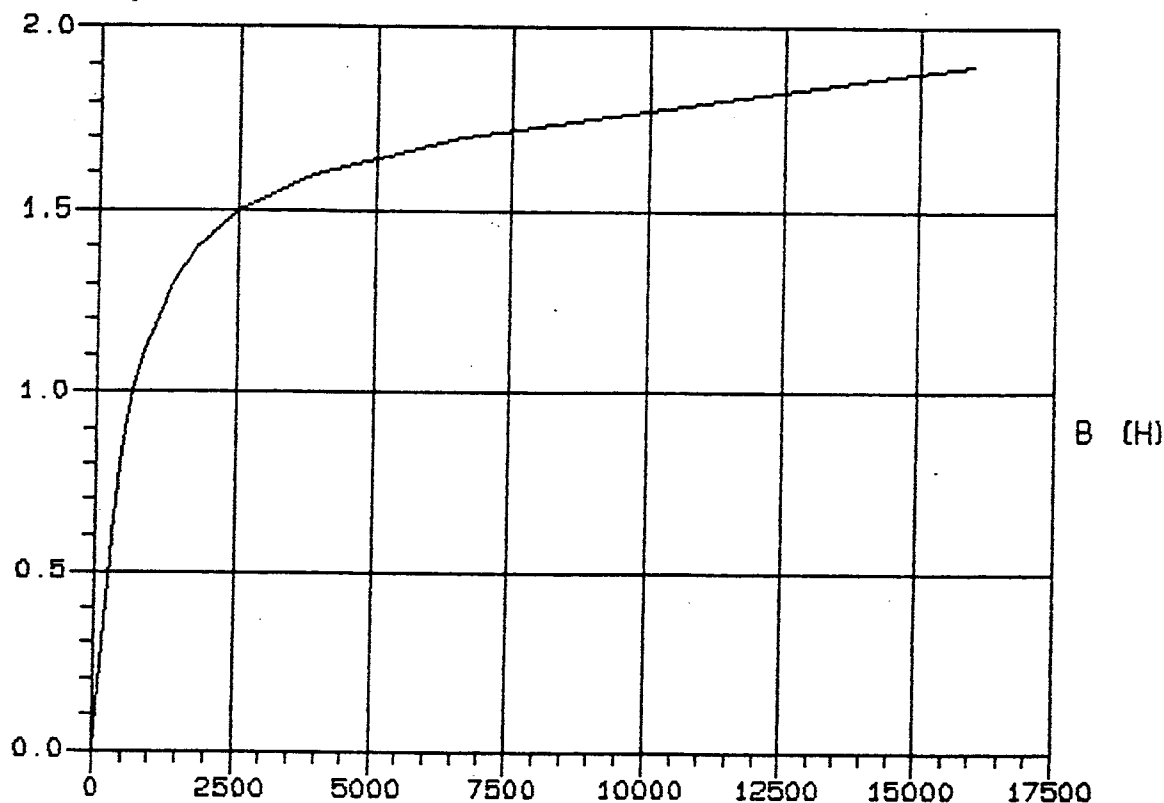


Figura 6.4 - Curva $B(H)$

Nas figuras 6.5 e 6.6 são apresentados os resultados na forma de equipotenciais da simulação de um caso não-linear utilizando elementos de primeira e segunda ordem respectivamente.

O traçado das equipotenciais da figura 6.6 foi feito utilizando o procedimento apresentado na seção (5.1.2), aproximação quadrática. Pode-se observar que o traçado utilizando elementos de segunda ordem é de qualidade semelhante ao obtido utilizando elementos de primeira ordem apesar da malha de segunda ordem possuir um número muito menor de elementos. Isto ocorre devido ao fato do traçado ter sido realizado levando em consideração a característica do potencial variar quadraticamente dentro do elemento de segunda ordem.

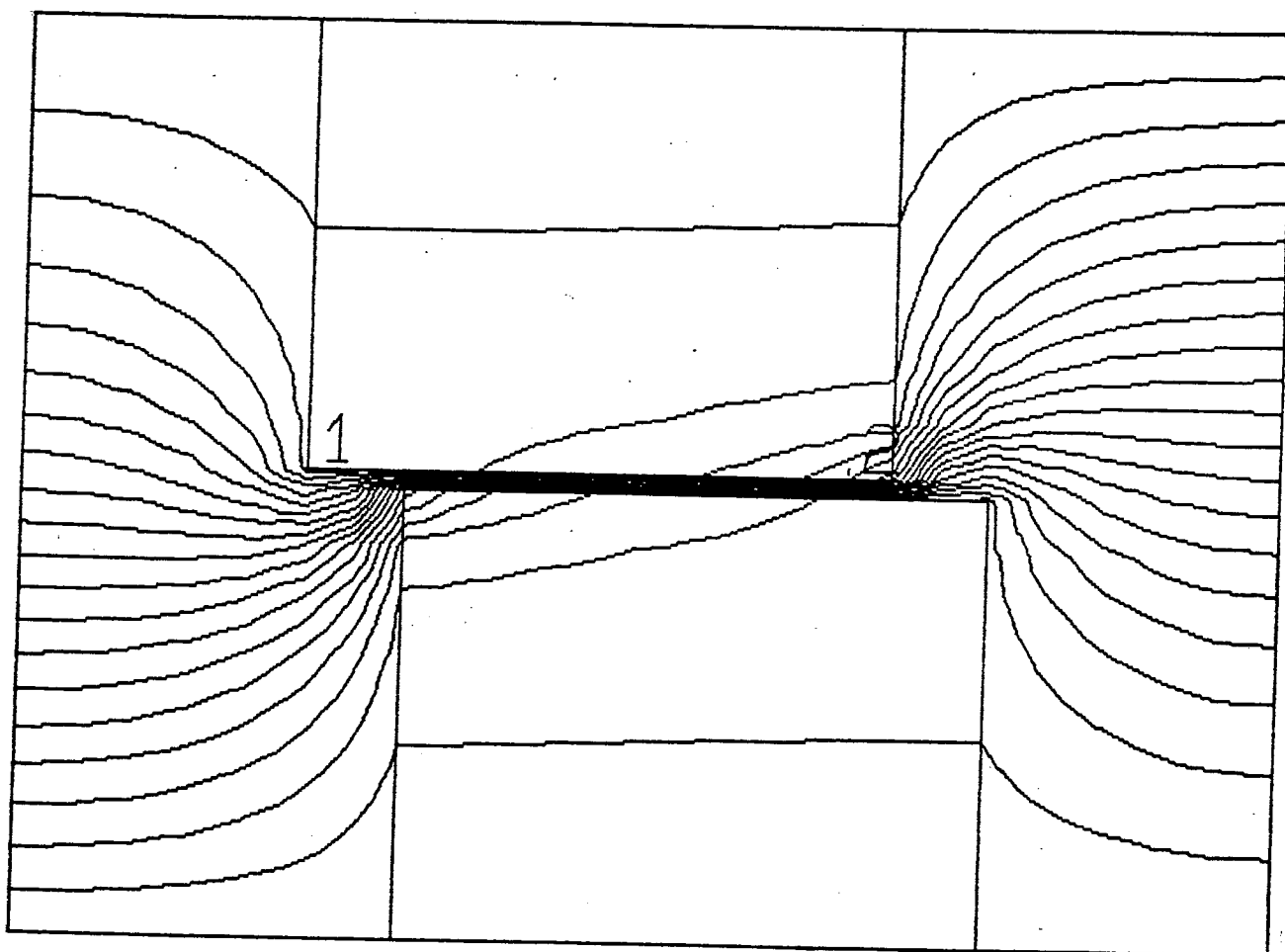


Figura 6.5 - Equipotenciais: Elementos de Primeira Ordem

Nas figuras 6.7 e 6.8 são apresentados os traçados das equipotenciais com as respectivas malhas de elementos de primeira e segunda ordem. Os elementos da figura 6.7 são chamados quadrilaterais [Bastos, 1989; Norrie, 1978]. Estes elementos são convenientemente decompostos em elementos triangulares de primeira ordem.

A malha de elementos de primeira ordem apresentada na figura 6.7 possui 437 elementos quadrilaterais, ou seja, 874 elementos triangulares e 480 nós enquanto que a malha de elementos de segunda ordem apresentada na figura 6.8 possui 216 elementos e 475 nós.

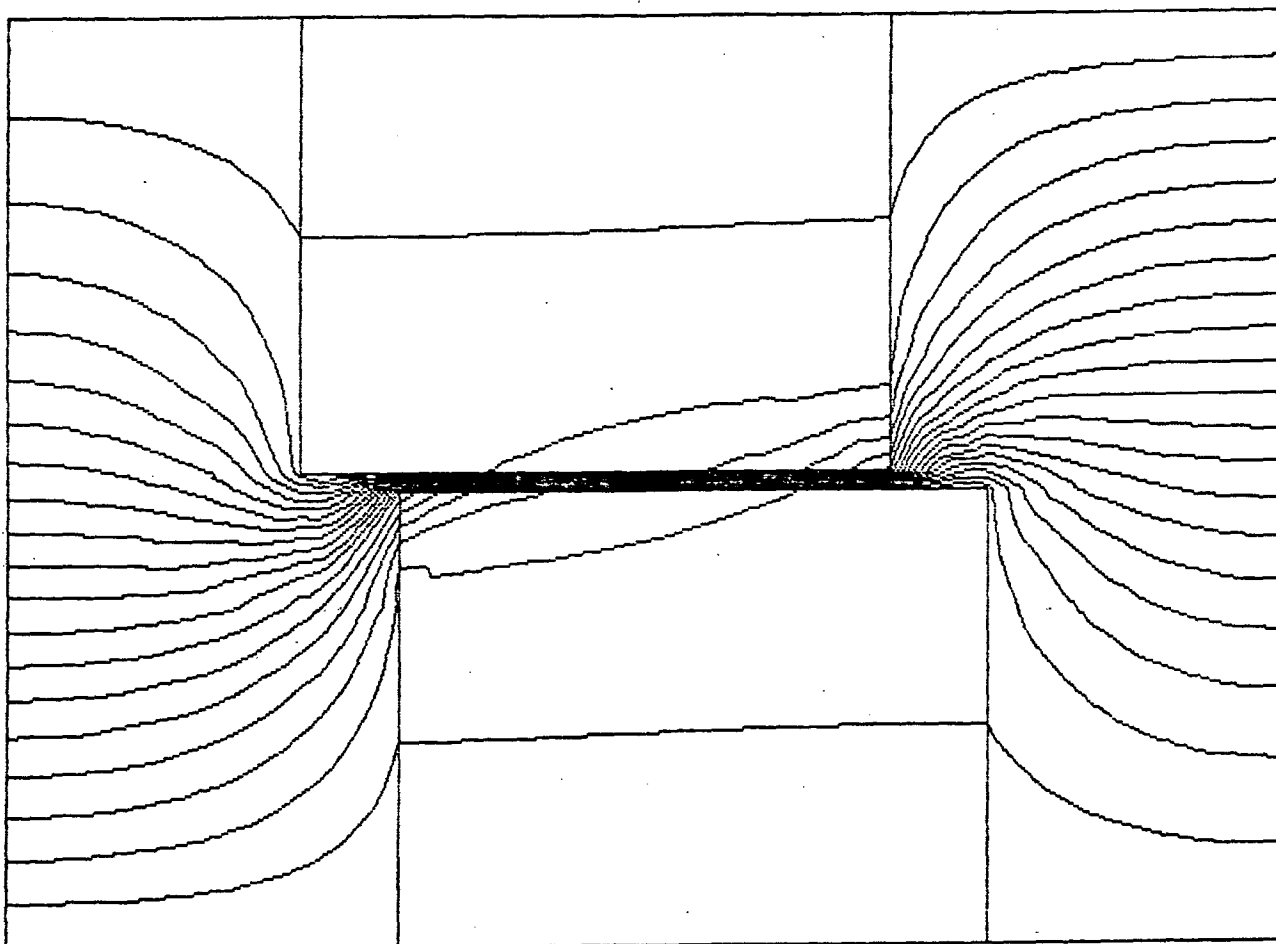


Figura 6.6 - Equipotenciais: Aproximação Quadrática

Foi utilizado o método de Newton-Raphson na resolução do sistema de equações não-lineares.

Como era esperado, o tempo gasto na formação e na resolução deste sistema de equações, quando utilizado o elemento de segunda ordem, foi bem superior ao tempo gasto para o elemento de primeira ordem. Especificamente neste caso, utilizando um microcomputador PC-AT, os tempos gastos foram de 536 e 4198 segundos, ou seja, o tempo gasto quando se utilizou o elemento de segunda ordem foi quase 8 vezes maior.

A variação do módulo do campo magnético \vec{H} em função do número de pontos utilizados no traçado em uma linha no entreferro da figura 6.3 é apresentada nos gráficos das figuras 6.9, primeira ordem, e 6.10, segunda ordem.

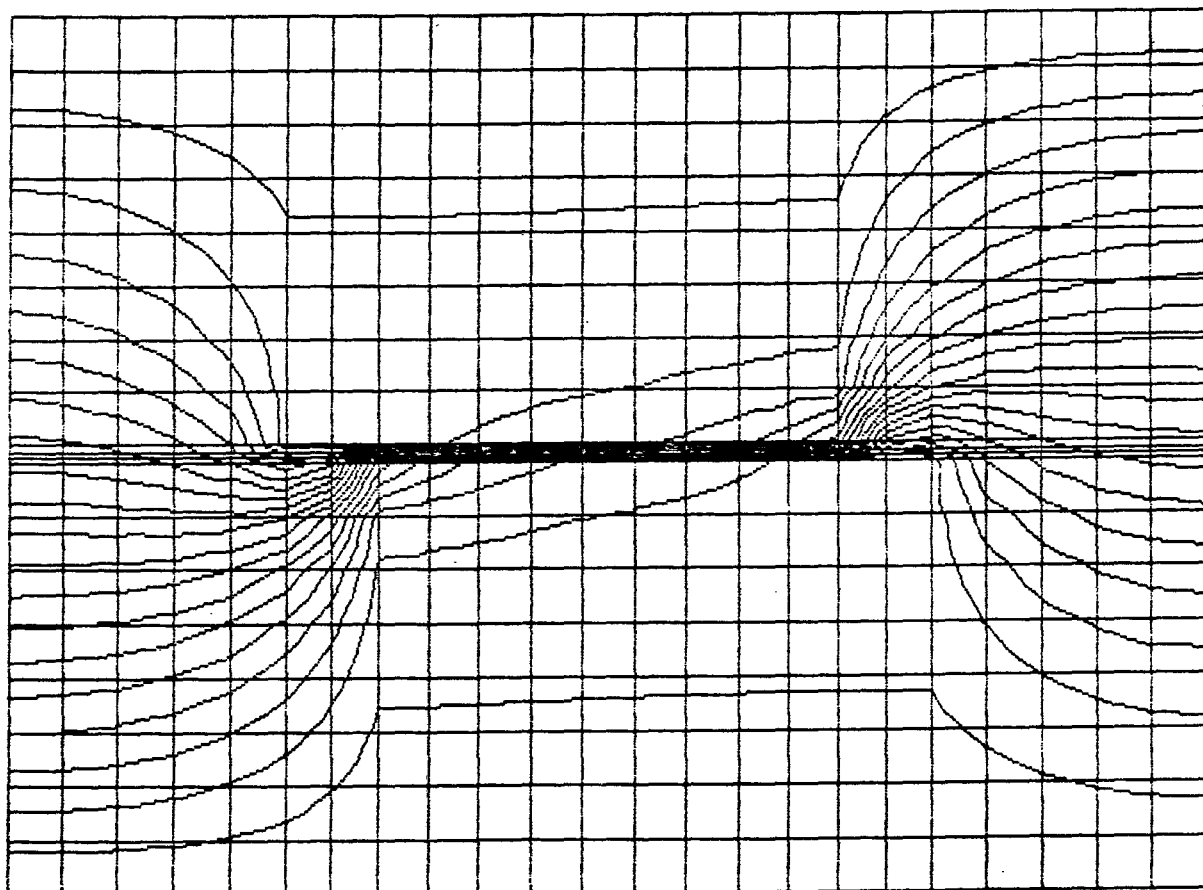


Figura 6.7 - Equipotenciais: Elementos de Primeira Ordem

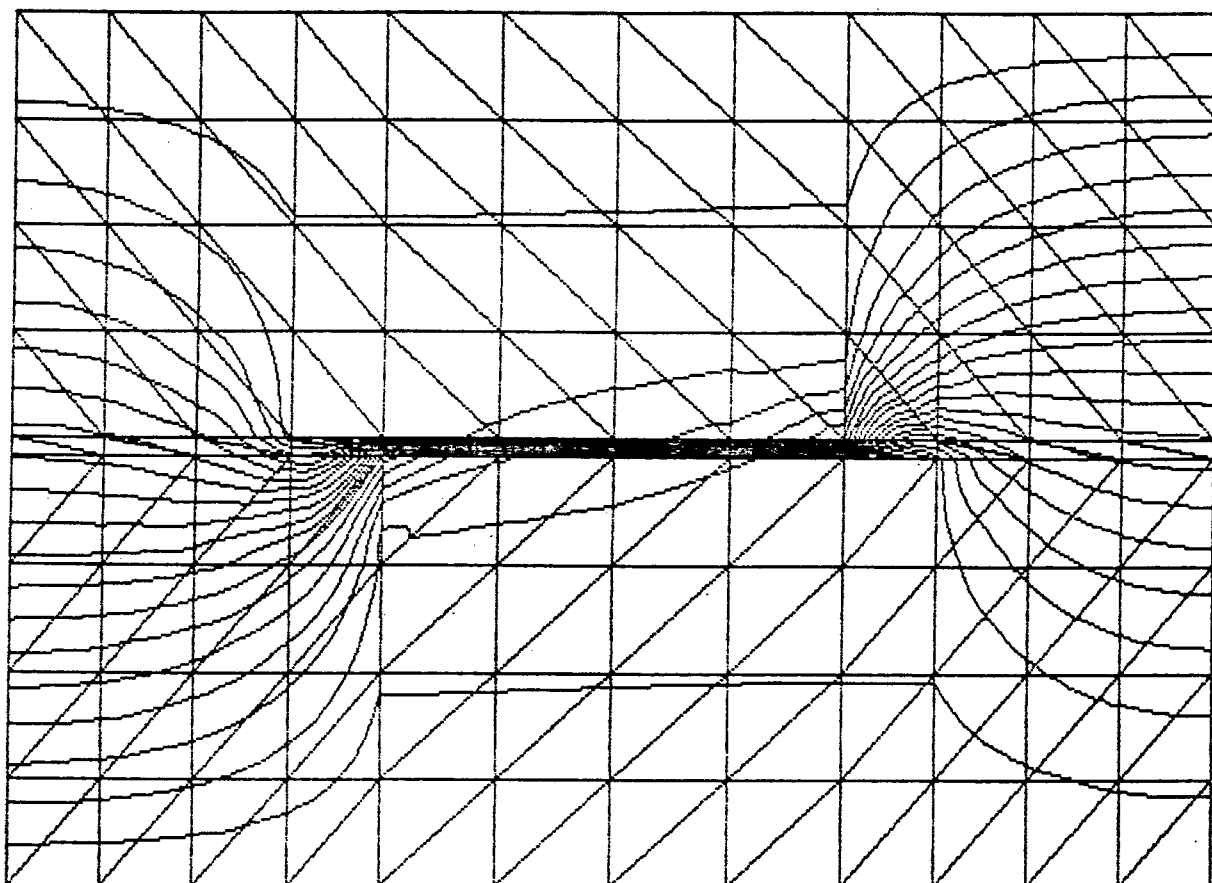


Figura 6.8 - Equipotenciais: Aproximação Quadrática

Como pode ser observado, a curva da figura 6.9 apresenta variações bruscas enquanto que a curva da figura 6.10 é bastante suave apesar de se ter utilizado o dobro de pontos no traçado da curva de primeira ordem.

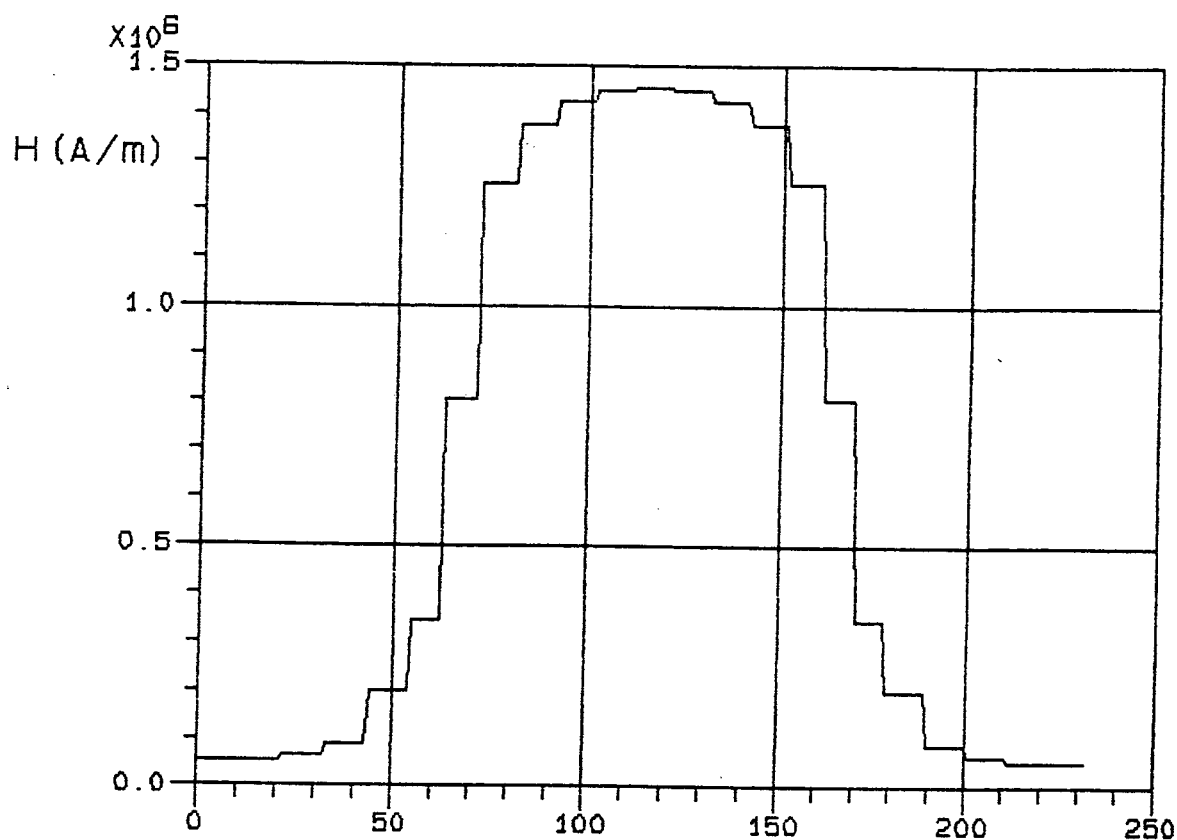


Figura 6.9 (Campo Primeira Ordem)

Nos gráficos da figura 6.11, primeira ordem, e 6.12, segunda ordem, é apresentada a variação da permeabilidade magnética em função do número de pontos utilizados entre os pontos 1 e 2 apresentados na figura 6.5. Nos gráficos das figuras 6.13 e 6.14 é apresentada a variação do campo magnético entre os pontos 1 e 2 da figura 6.5 para os casos de primeira e segunda ordem respectivamente. Os pontos utilizados no traçado de todos os gráficos foram sempre obtidos do ponto 1 para o ponto 2.

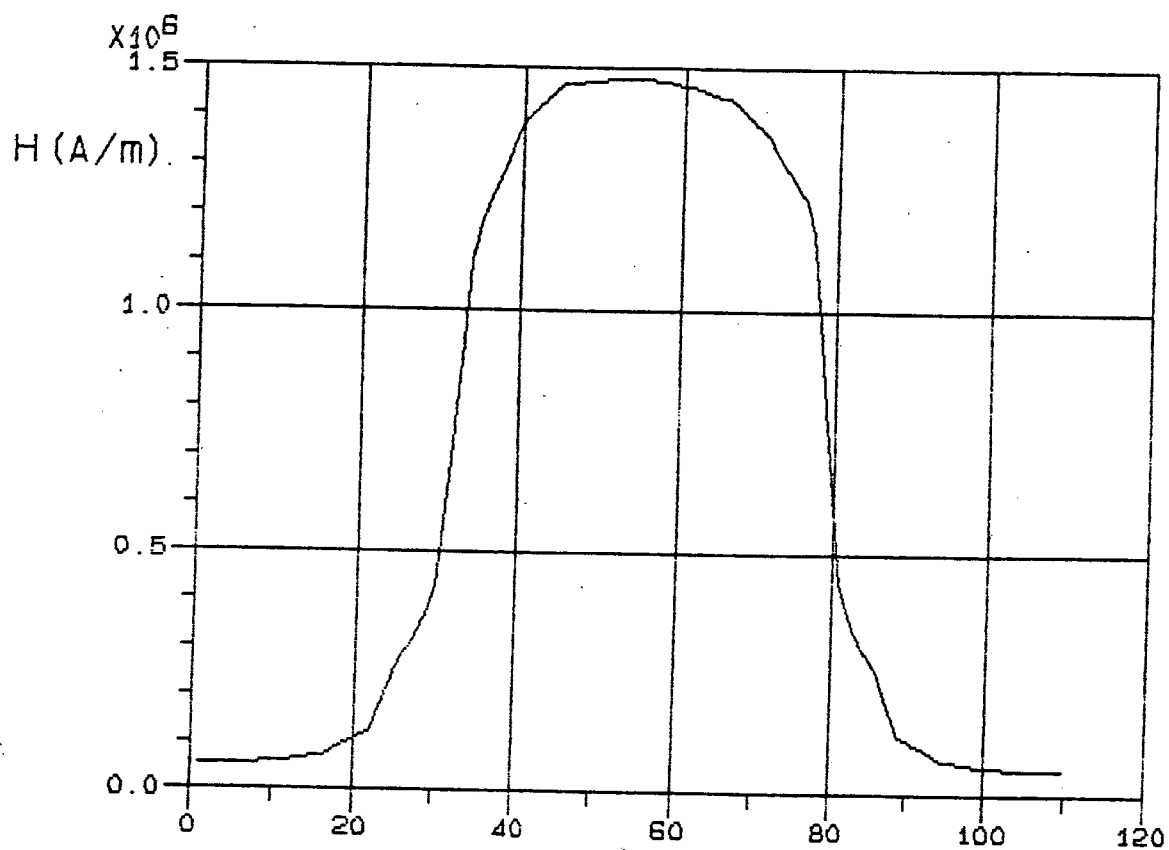


Figura 6.10 (Campo - Segunda Ordem)

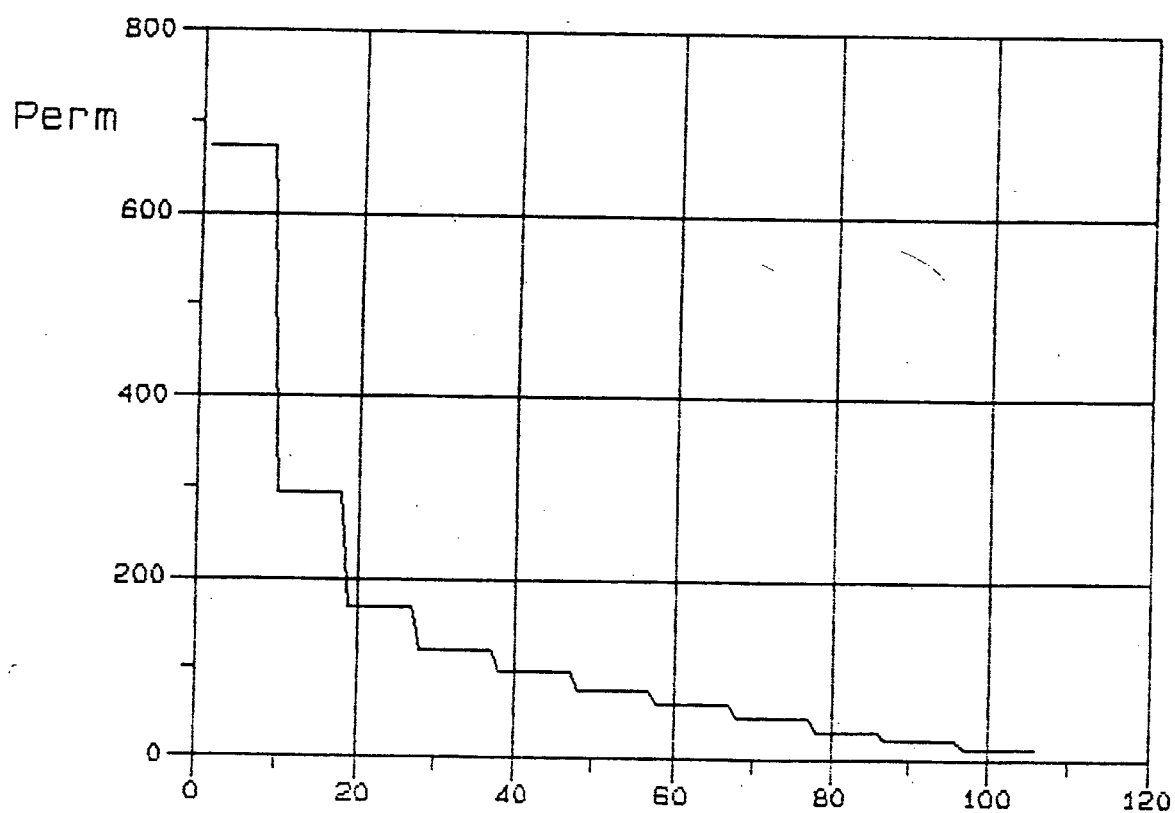


Figura 6.11 (Permeabilidade - Primeira Ordem)

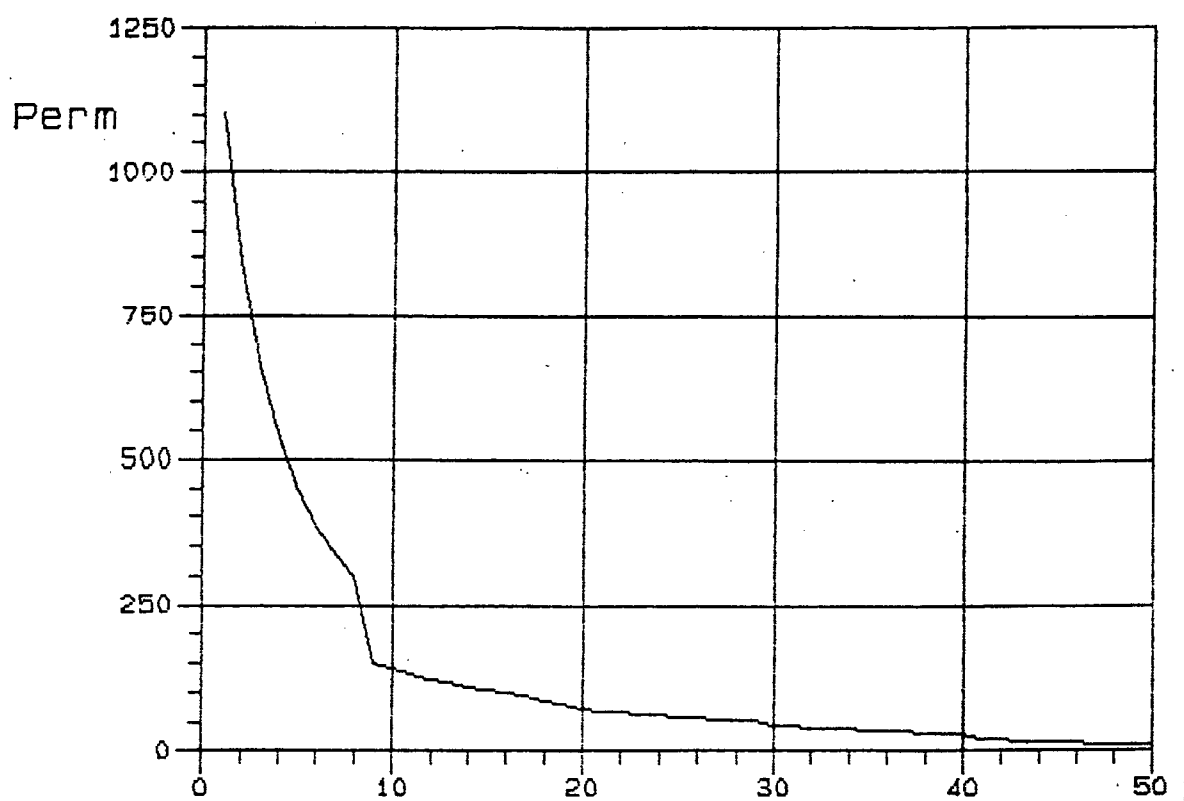


Figura 6.12 (Permeabilidade - Segunda Ordem)

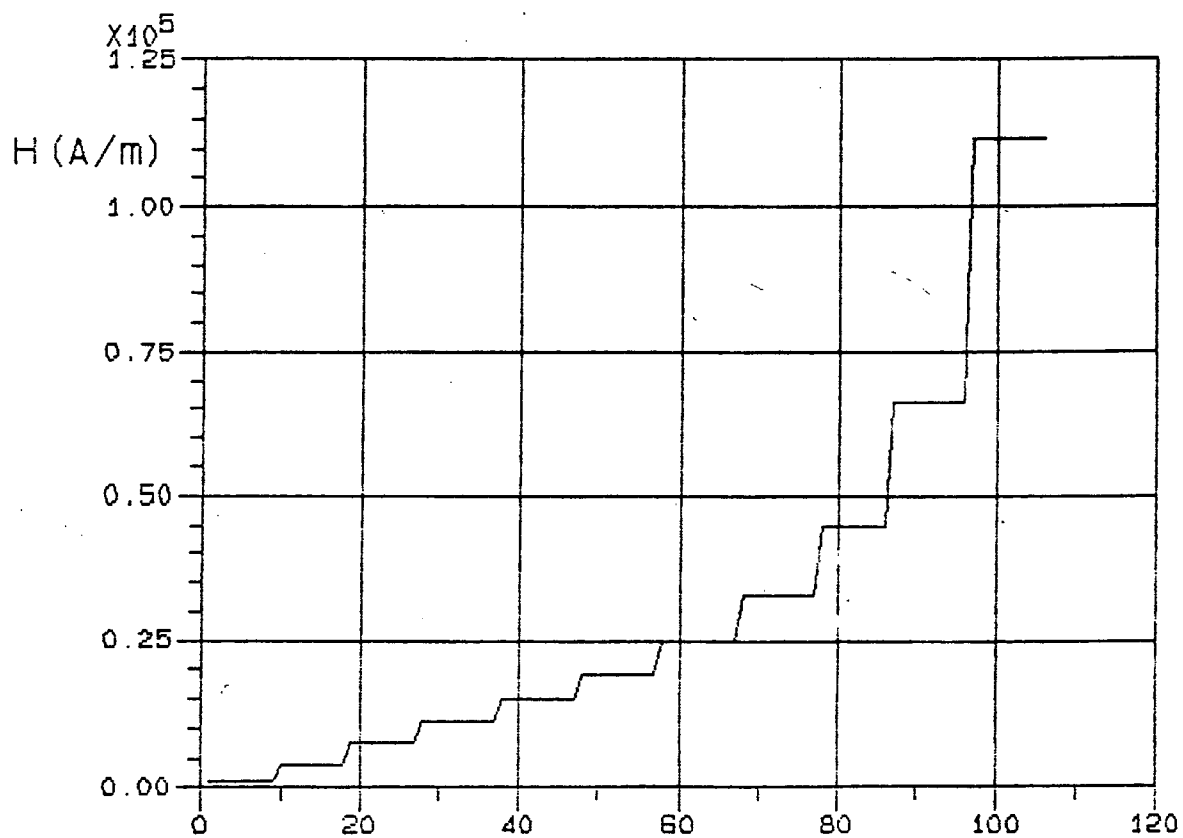


Figura 6.13 (Campo - Primeira Ordem)

Como pode ser observado nas figuras 6.12 e 6.14 existe uma variação suave da permeabilidade e do campo magnético quando se utiliza elementos de segunda ordem. Pode também ser observado uma diferença significativa nos valores da permeabilidade nos gráficos das figuras 6.11 e 6.12 em pontos próximos ao ponto 1 da figura 6.5. Além disso, pode-se notar uma diferença nos valores do campo magnético em pontos próximos ao ponto 2 nas figuras 6.13 e 6.14.

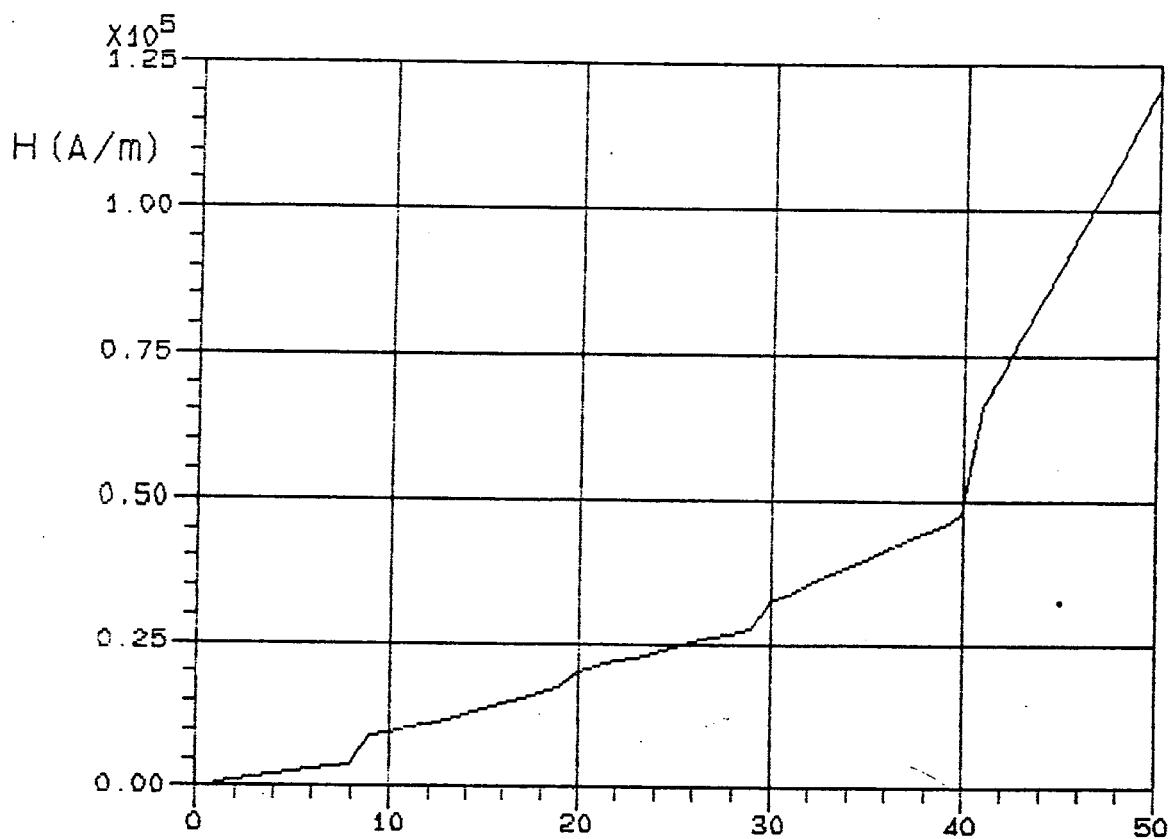


Figura 6.14 (Campo - Segunda Ordem)

O fato do campo variar linearmente dentro do elemento finito de segunda ordem justifica a variação suave da permeabilidade e do campo magnético nos gráficos apresentados acima. Por outro lado, sabe-se que o campo é constante dentro do elemento de primeira ordem o que resulta na variação do campo e da permeabilidade na forma de degrau como visto anteriormente.

As diferenças observadas nos valores da permeabilidade próximo ao ponto 1 e do campo magnético próximo ao ponto 2 podem ser atribuídas também ao fato

do campo ser constante dentro de um elemento de primeira ordem. Como pode ser observado, por exemplo, no gráfico da figura 6.11, uma maior discretização próximo ao ponto 1 tornará menor a diferença entre os valores da permeabilidade dos gráficos das figura 6.11 e 6.12.

O valor da força de atração entre os dois dentes de aço da figura 6.3 obtido através do Tensor de Maxwell apresentou uma diferença da ordem de 3% nos cálculos utilizando elementos de primeira e segunda ordem. Uma diferença da mesma ordem foi encontrada no valor do fluxo magnético entre os dentes metálicos.

6.3 - Potencial Vetor Magnético

Nesta seção será feita uma análise comparativa de alguns resultados obtidos na simulação do fenômeno magnético no eletro-ímã apresentado na figura 6.15.

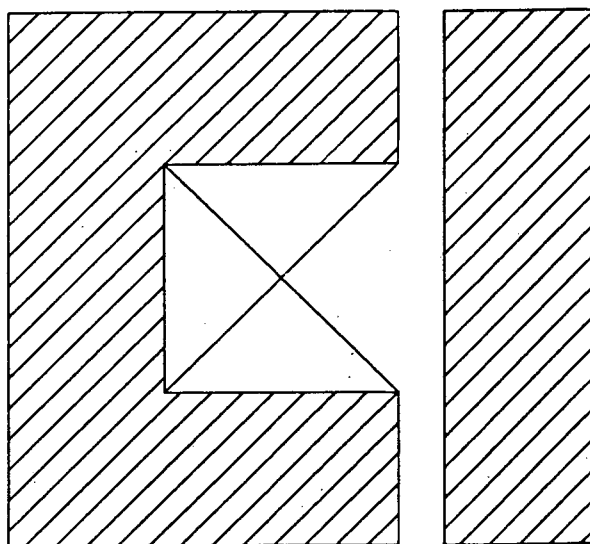


Figura 6.15 - Eletro-Ímã

Nas figuras 6.16 e 6.17 são apresentados os resultados desta simulação na forma de equipotenciais quando a estrutura é discretizada em elementos de primeira e segunda ordem respectivamente.

A curva $B(H)$ do material do núcleo de ferro foi apresentada na seção anterior na figura 6.4.

As equipotenciais da figura 6.17, segunda ordem, foram traçadas utilizando o procedimento apresentado na seção (5.1.1), aproximação linear. Como já mencionado, pode-se obter um traçado melhor das equipotenciais utilizando este procedimento dividindo-se o elemento de segunda ordem em um maior número de elementos de primeira ordem (Meek [13]).

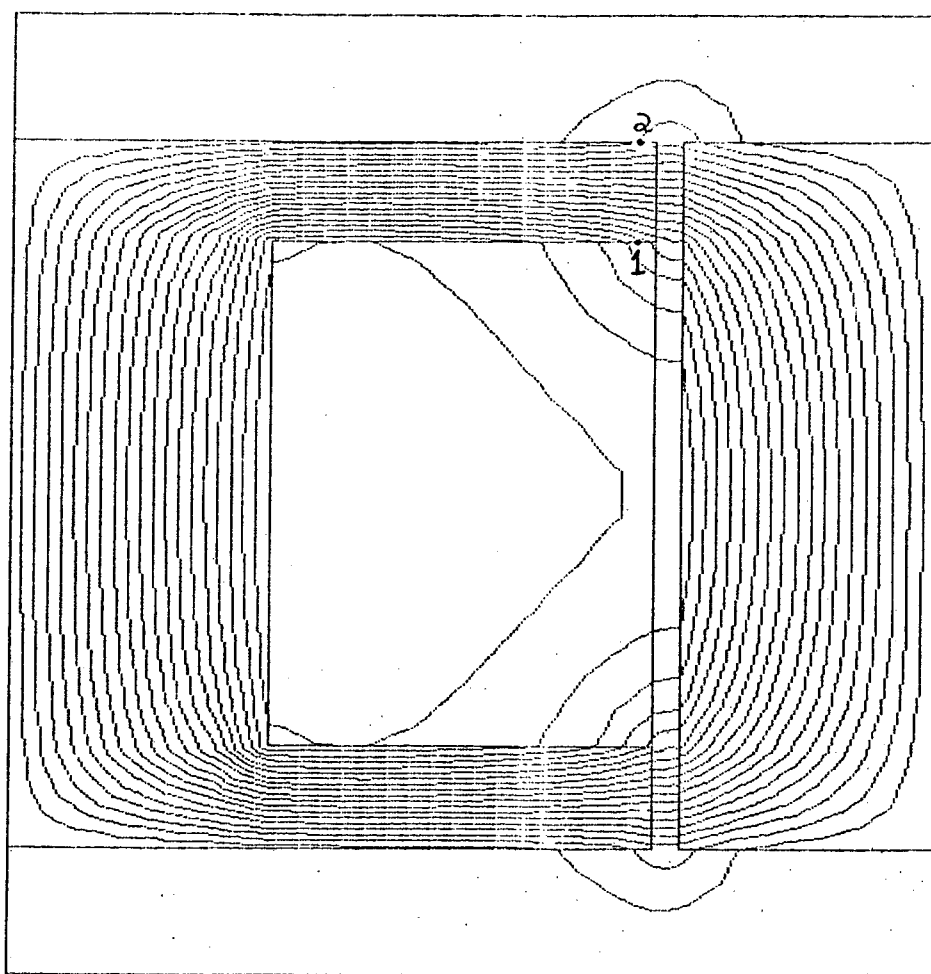


Figura 6.16 - Equipotenciais: Elementos de Primeira Ordem

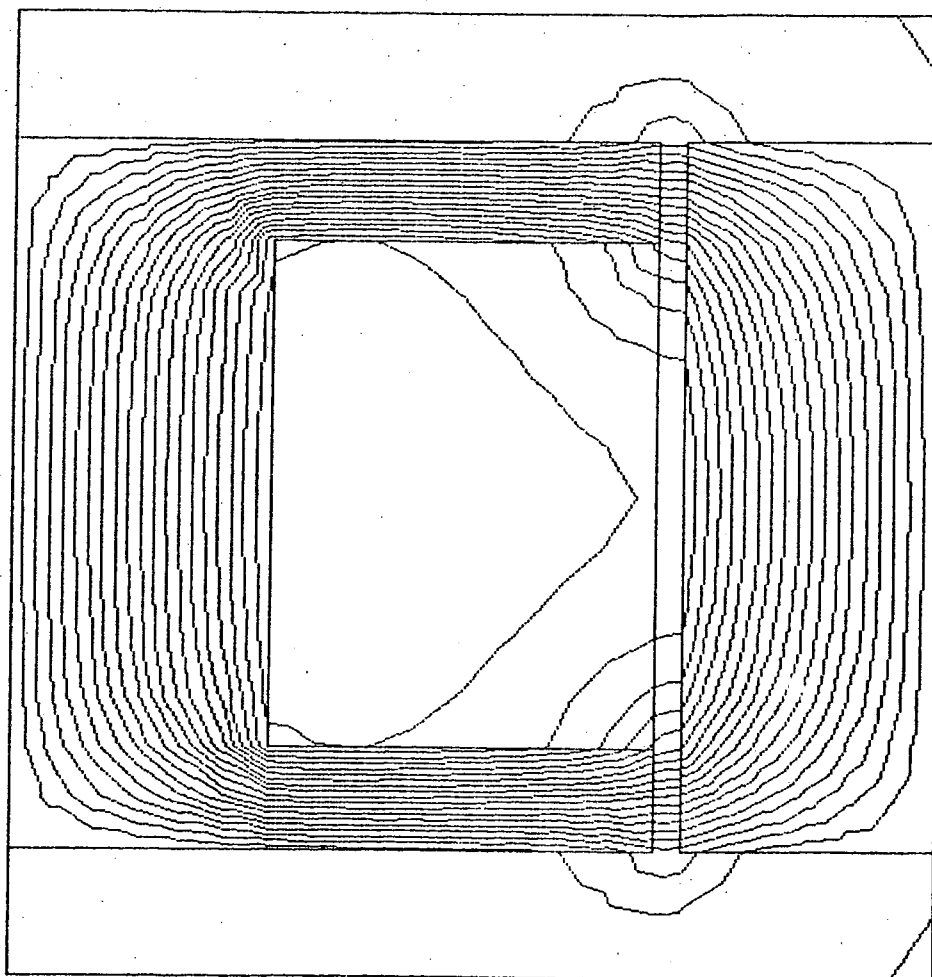


Figura 6.17 - Equipotenciais: Aproximação Linear

Nas figuras 6.18 e 6.19 são apresentados os traçados das equipotenciais em conjunto com as respectivas malhas de primeira e segunda ordem.

As equipotenciais da figura 6.19 foram obtidas utilizando-se o procedimento apresentado na seção (5.1.2), aproximação quadrática. Pode-se observar uma diferença na suavidade de variação nas equipotenciais das figuras 6.17 e 6.19, como era esperado.

A malha de elementos finitos de primeira ordem da figura 6.18 possui 441 elementos quadrilaterais, ou seja, 882 elementos triangulares e 484 nós enquanto que a malha da figura 6.19 possui 198 elementos e 437 nós.

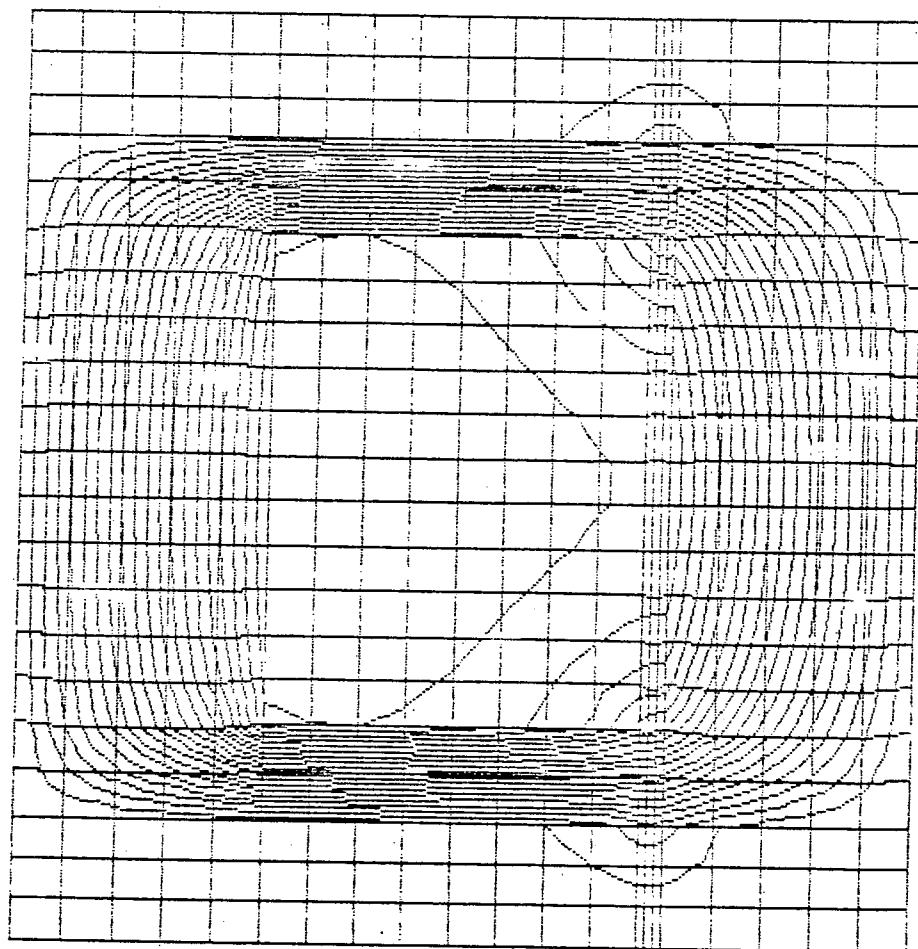


Figura 6.18 - Equipotenciais: Elementos de Primeira Ordem

O tempo gasto na formação e na resolução do sistema de equações não-lineares foi de 467 segundos, primeira ordem, e 6497 segundos, segunda ordem. Foi utilizado o método de Newton-Raphson na resolução do sistema.

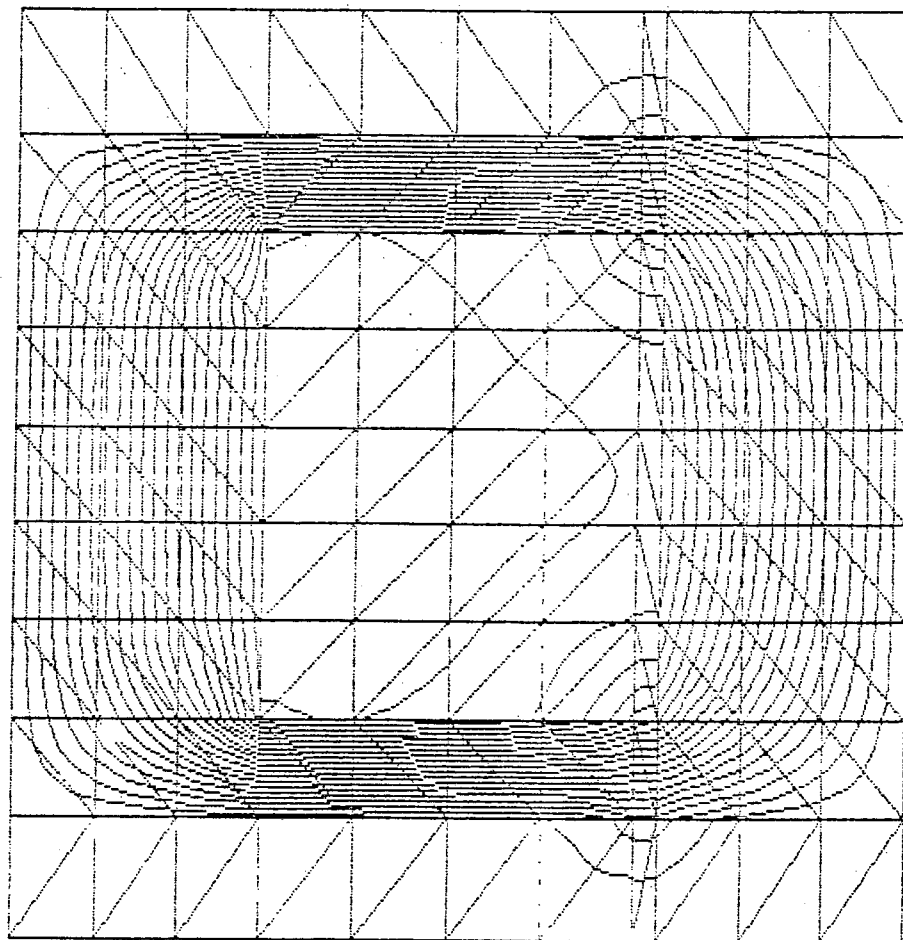


Figura 6.19 - Equipotenciais: Aproximação Quadrática

Nas figuras 6.20 e 6.21 são apresentados os gráficos da variação do módulo da indução magnética pelo número de pontos calculados no centro do entreferro para os elementos de primeira e segunda ordem respectivamente. Observa-se uma variação bastante suave da indução magnética quando se utiliza elemento de segunda ordem.

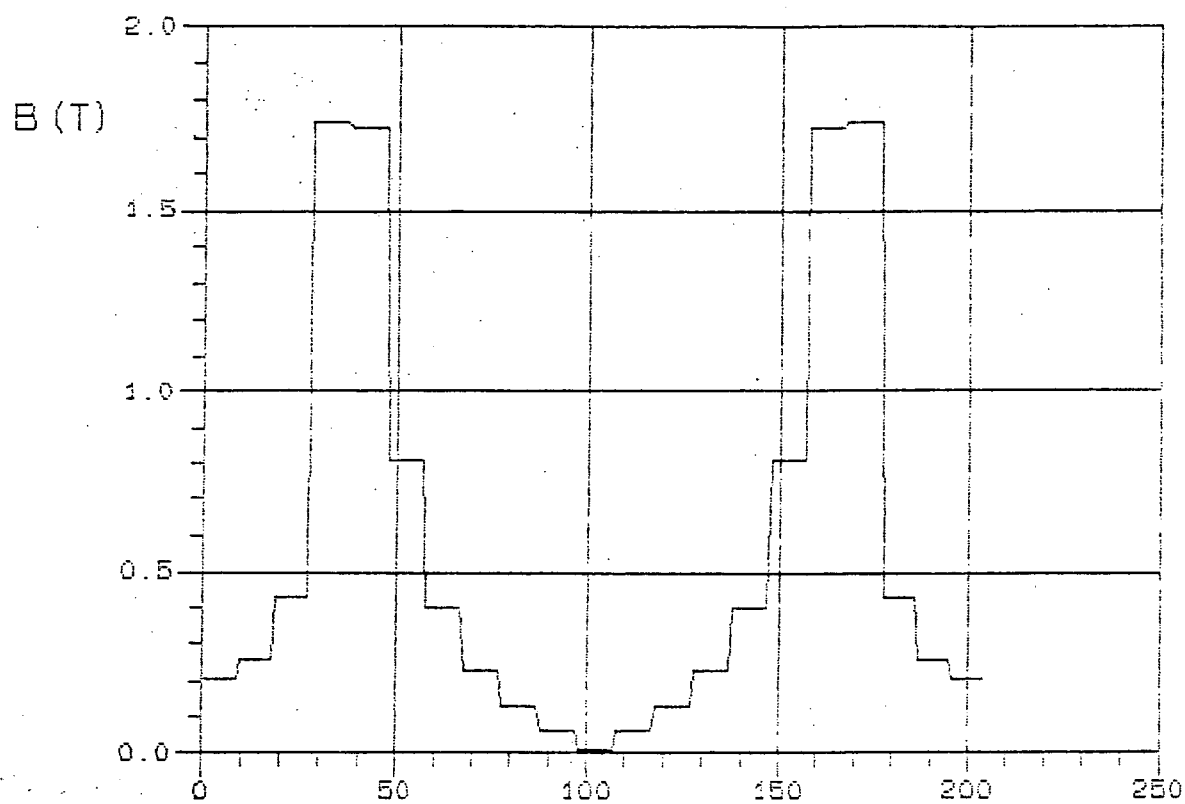


Figura 6.20 (Indução - Primeira Ordem)

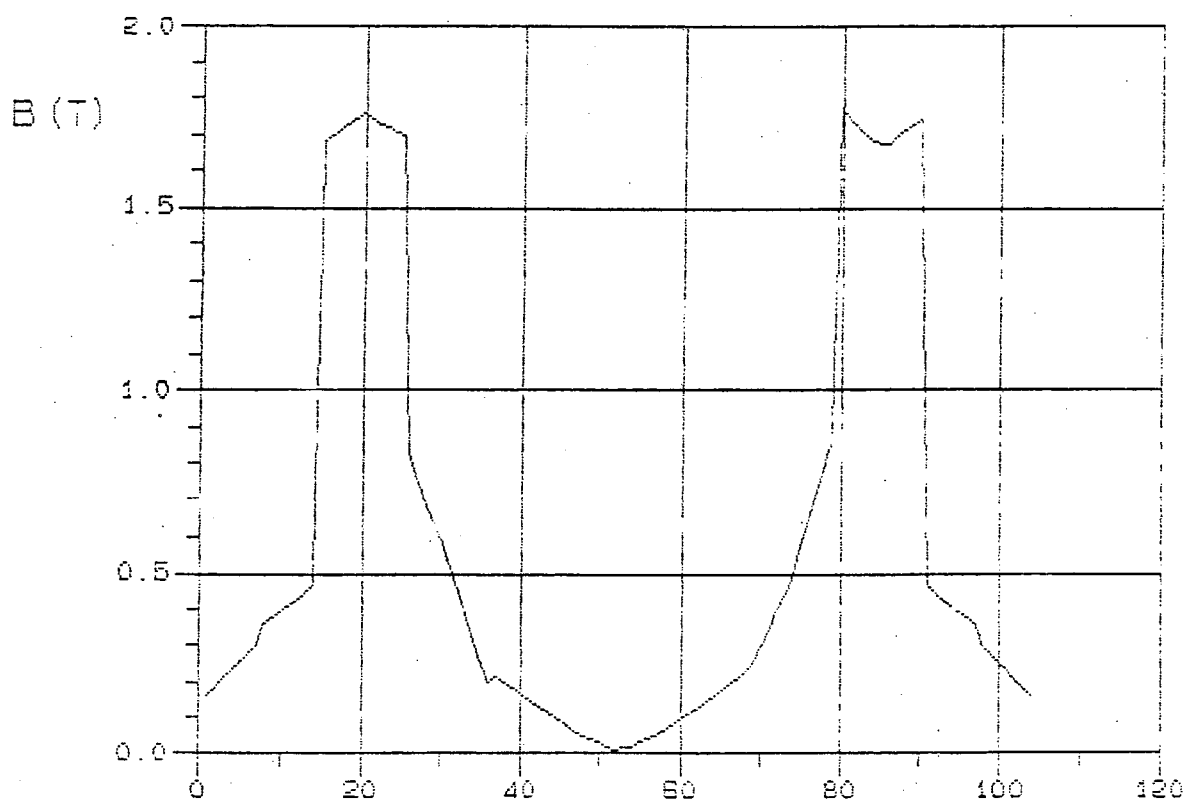


Figura 6.21 (Indução - Segunda Ordem)

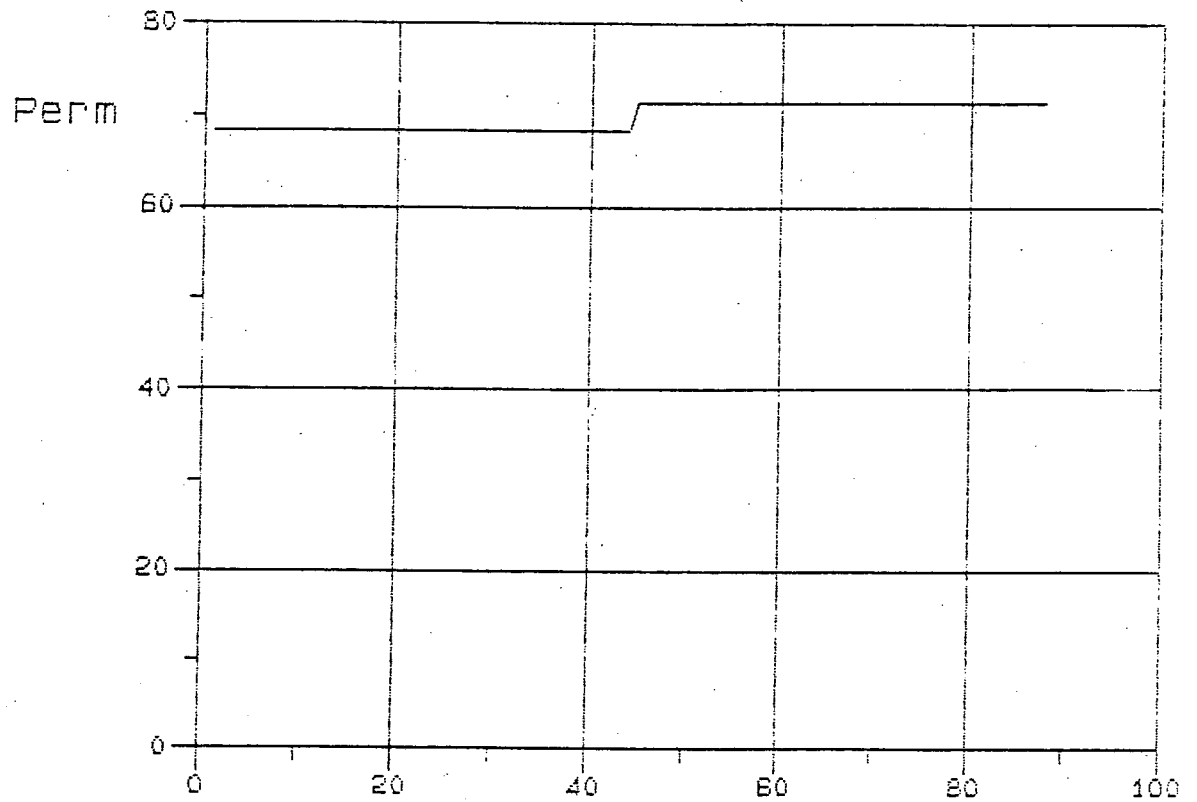


Figura 6.22 (Permeabilidade - Primeira Ordem)

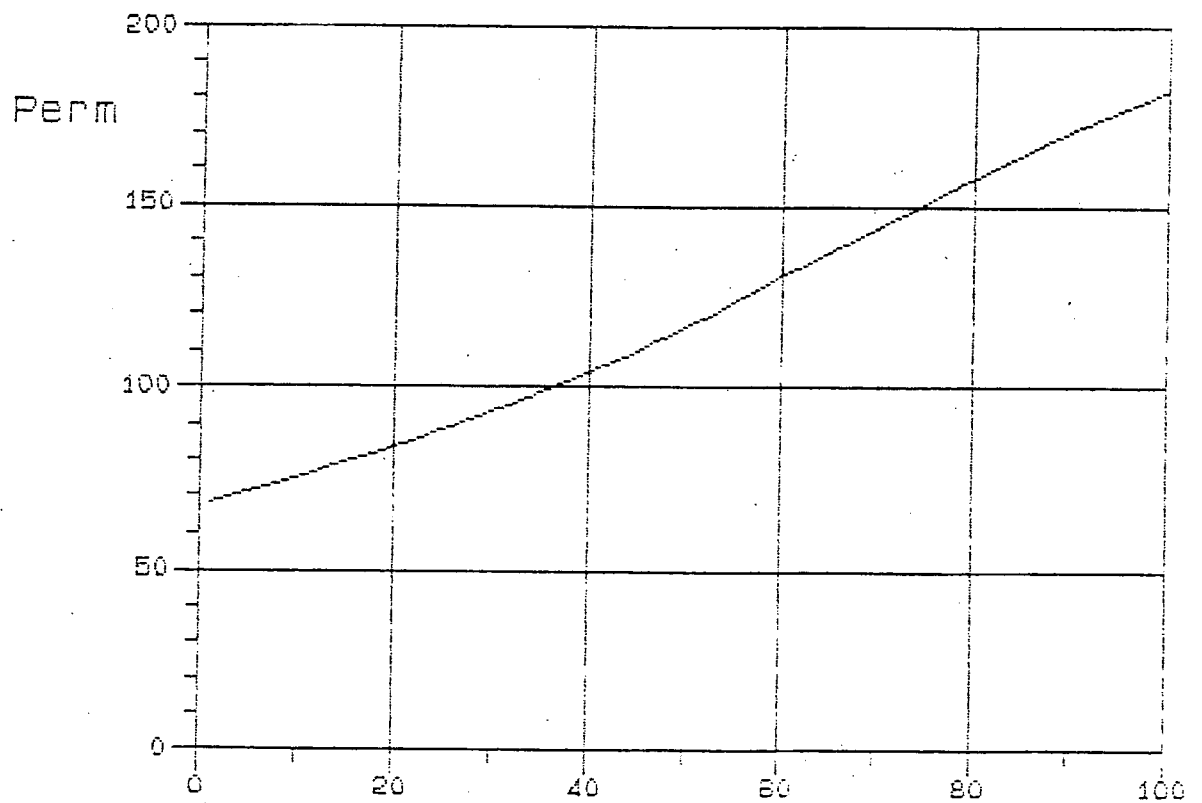


Figura 6.23 (Permeabilidade - Segunda Ordem)

Nos gráficos das figuras 6.22 e 6.23 é apresentada a variação da permeabilidade magnética entre os pontos 1 e 2, apresentados na figura 6.16, para as simulações em primeira e segunda ordem respectivamente. Os pontos utilizados no traçado dos gráficos foram obtidos do ponto 1 para o ponto 2.

Nota-se uma diferença significativa na forma de variação e nos valores da permeabilidade nos dois casos. Pode-se observar que seria necessário um número bem maior de elementos de primeira ordem para que a permeabilidade fosse descrita como na figura 6.23.

Observou-se uma diferença da ordem de 2% entre os valores de força calculados pelo Tensor de Maxwell quando utilizado elementos de primeira e segunda ordem. Foi observado uma diferença também desta ordem de grandeza no cálculo do fluxo magnético no entreferro do eletro-ímã da figura 6.15.

6.4 - Conclusão - Capítulo 6

Neste capítulo foram apresentados alguns resultados ilustrativos de cálculo de campo elétrico e magnético utilizando o elemento finito triangular subparamétrico de segunda ordem.

A principal desvantagem encontrada do elemento de segunda ordem em relação ao elemento de primeira ordem nos diversos casos lineares e não-lineares simulados foi o maior tempo computacional necessário na formação e na resolução do sistema matricial. Além desta desvantagem, observou-se uma maior dificuldade na convergência dos problemas não-lineares quando utilizado o método de Newton-Raphson nas simulações com elementos de segunda ordem.

A grande vantagem de se utilizar o elemento de segunda ordem em relação ao elemento de primeira ordem é a maior exatidão nos resultados obtidos nos casos lineares ou não-lineares com potencial escalar ou vetor como foi apresentado sucintamente nas seções anteriores.

Observou-se uma diferença significativa nos valores calculados do campo elétrico, seção (6.1), do campo magnético, seção (6.2), e da indução magnética, seção (6.3). A utilização de malhas de primeira ordem mais refinadas tornaria menor essa diferença.

Com relação ao cálculo de força pelo Tensor de Maxwell, acredita-se que os resultados obtidos com elementos de segunda ordem sejam melhores devido aos resultados obtidos no cálculo dos campos. Porém, como o cálculo de força por este método depende bastante da estrutura simulada, da malha e superfície escolhida ao redor do corpo ao qual se deseja obter a força, não se considera este resultado definitivo.

Capítulo 7

Conclusão Geral

Neste trabalho foram apresentados os resultados do estudo e da implementação do método de elementos finitos utilizando o elemento finito triangular subparamétrico de segunda ordem na resolução das equações diferenciais parciais que regem os fenômenos eletromagnéticos estáticos bidimensionais.

Obteve-se, nas simulações, bons resultados numéricos utilizando o elemento de segunda ordem.

No capítulo 6 foi apresentado uma análise comparativa entre resultados obtidos utilizando os elementos de primeira e segunda ordem. A principal vantagem observada do elemento de segunda ordem, mesmo utilizando malhas de baixa densidade, foi a melhor exatidão dos resultados numéricos. Foi observado um aumento significativo no tempo gasto na formação e na resolução do sistema matricial global quando se utiliza este elemento.

As duas formas de apresentação gráfica dos resultados discutidas no capítulo 5 proporcionaram bons resultados. A complexidade de implementação do procedimento de traçado via aproximação quadrática e o aumento no tempo de cálculo tornam esta proposta não muito atraente. A proposta apresentada na seção (5.1.1), aproximação linear, é uma maneira simples e muito eficiente de traçado de linhas equipotenciais.

Considera-se necessário um aprofundamento no estudo do cálculo de força. Sugere-se que seja feita eventualmente a implementação do método de Trabalhos Virtuais e um estudo comparativo entre os resultados obtidos por este método e pelo método de Tensor de Maxwell já implementado e utilizado.

Finalizando, considerou-se os resultados obtidos tanto no estudo como na implementação do método de elementos finitos utilizando o elemento finito triangular subparamétrico de segunda ordem satisfatórios e proveitosos.

CAPÍTULO 8

Referências Bibliográficas

- 1 - Aldefeld, B.. "Forces in Electromagnetic Devices". Compumag 78, Grenoble.
- 2 - Bastos, J. P. A.. Eletromagnetismo e Cálculo de Campos. Editora da Universidade Federal de Santa Catarina, primeira edição, 1989.
- 3 - Bastos, J. P. A.. "Calcul de Champs Magnétiques par une Méthode d'Éléments Finis 2D et 3D - Contribution à la Détermination des Caractéristiques de Machines à réluctance Variable Polidiscoide". Tese de "Doctorat d'Etat", Univesité Paris VI, 1984.
- 4 - Chari, M. V. K. & Silvester, P. P.. "Finite Elements in Electrical and Magnetic Field Problems". John Wiley & Sons Press, segunda edição, 1984.
- 5 - Chung, T. J.. "Finite Element Analysis in Fluid Dynamics". McGraw-Hill Press, 1978..
- 6 - Coulomb, J. L.. "A Methodology for the Determination of Global Electromechanical Quantities from a Finite Element Analysis and Its Application to the Evaluation of Magnetic Forces, Torques and Stiffness". IEEE Transactions on Magnetics, vol. mag 19, n. 6, novembro, pág. 2514-2519, 1983.
- 7 - Dhatt, Gouri & Touzot, Gilbert. "Une Présentation de la Méthode des Éléments Finis". Maloine S. A. Éditeur, segunda edição, 1984.
- 8 - Gray, W. H. & Akin, J. E.. "An Improved Method for Contouring on Isoparametric Surfaces". International Journal for Numerical Methods in Engineering, vol. 14, pág. 451-472, 1979.
- 9 - Judice, Edson Durão. Funções de Várias Variáveis. Apostila da Universidade Federal de Minas Gerais, 1981.
- 10 - Krauss, J. D. & Carver, K. R.. Eletromagnetismo. Editora Granabara Dois, segunda edição, 1978.
- 11 - Kreyszig, Erwin. Matemática Superior. Livros Técnicos e Científicos Editora S.A., vol. 1,2,3 e 4, quarta edição, 1974.

- 12 - Macedo, Annita. Eletromagnetismo. Editora Guanabara S.A., primeira edição, 1988.
- 13 - Meek, J. L. & Beer, G.. "Contour Plotting of Data Using Isoparametric Element Representation". International Journal for Numerical Methods in Engineering, vol. 10, pág. 954-957, 1976.
- 14 - Mesquita, R. C.. Cálculo de Campos Eletromagnéticos 3D Utilizando Elementos Finitos: Correntes de Foucault e Aquecimento por Correntes Induzidas. Projeto de Tese de Doutorado, Universidade Federal de Santa Catarina, 1988.
- 15 - Nakata, T. & Takahashi, N.. "Comparative Study of the Polynomial Orders of High Order Finite Elements". Proceedings of Beijing International Symposium on Electromagnetic Fields in Electrical Engineering, pág. 449-451, 1988.
- 16 - Nian, L. & Kexun, J.. "Comparative Study of Two Kinds of High-Order Triangular Finite Element Method for Calculating 2D Nonlinear Electromagnetic Field Problems". Proceedings of Beijing International Symposium on Electromagnetic Fields in Electrical Engineering, pág. 339-342, 1988.
- 17 - Norrie, D. H. & Devries, G.. "An Introduction to Finite Element Analysis". Academic Press, 1978.
- 18 - Plonsey, R. & Collin, R. E.. "Principles and Aplications of Electromagnetic Fields". McGraw-Hill Book Company, 1961.
- 19 - Raizer, A.. Contribuição à Elaboração de um Sistema 3D de Cálculo de Campos Elétricos e Magnéticos Utilizando a Técnica de Elementos Finitos. Tese de Mestrado, Universidade Federal de Santa Catarina, 1987.
- 20 - Reichert, K. & Freundl, H.. "The Calculation of Forces and Torques Within Numerical Magnetic Field Calculation Methods". Compumag Oxford.
- 21 - Sabonnadière, J. C. & Coulomb, J. L.. "Éléments Finis et CAO". Hermes Publishing, primeira edição, 1986.
- 22 - Silvester, P. P. & Ferrari, R. L.. "Finite Elements for Electrical Engineers". Cambridge University Press, primeira edição, 1983.

- 23 - Silvester, P. P. & Konrad, A.. "Analysis of Transformer Leakage Phenomena by High-Order Finite Element". IEEE PAS, pág. 1843-1855, 1973.
- 24 - Silvester, P. P. & Rafinejad, P.. "Curvilinear Finite Elements for Two-Dimensional Saturable Magnetic Fields". IEEE PAS, pág. 1861-1870, 1974.
- 25 - Stelzer, J. F. & Welzel, R.. "Plotting of Contours in a Natural Way". International Journal for Numerical Methods in Engineering, vol. 24, pág. 1757-1769, 1987.
- 26 - Zienkiewicz, O. C.. "The Finite Element Method". McGraw-Hill Book Company, terceira edição, 1977.